



PROJETO DE GRADUAÇÃO II

DESEMPENHO ACÚSTICO EM DUTOS COM LINERS E FLUXO UNIFORME SUBSÔNICO

Guilherme Augusto D. da Silva 14/0141995

Brasília, 5 de dezembro de 2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO II

**DESEMPENHO ACÚSTICO EM DUTOS COM
LINERS E FLUXO UNIFORME SUBSÔNICO**

Guilherme Augusto D. da Silva 14/0141995

Relatório submetido como requisito parcial para a obtenção do grau de Engenheiro
Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Adriano Todorovic Fabro, Ph.D ENM/UnB

Ana Luisa Pereira Maldonado, Ph.D ARUP Group Limited, Reino Unido

Prof. Bráulio Gutierrez Pimenta, D.Sc ENM/UnB

Prof. Roberto Francisco Bobenrieth Miserda, D.Sc ENM/UnB

Brasília 5 de dezembro de 2019

*Dedico este trabalho ao meu pai Hélio   minha mãe Neusa e ao meu irmão João.
Vocês são parte disso.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha família por terem me apoiado durante todo esse tempo. Agradeço especialmente ao meu pai Hélió e minha mãe Neusa por terem garantido a minha educação e tudo que precisei com seu trabalho honesto e árduo, além terem sido pais maravilhosos.

Agradeço ao meu irmão João por sua amizade e companheirismo.

Agradeço aos ótimos professores da Universidade de Brasília em especial ao meu orientador Adriano Fabro e ao Professor Bráulio por sua grande solicitude e disponibilidade para me ensinar e ajudar durante este e outros trabalhos.

Agradeço a todos os amigos que fiz ao longo desses anos (Gustavo, Pedro, Caio, André, Eliza, Stefan, Caixeta e todos os demais) por proporcionarem ótimas lembranças.

Resumo

Turbo máquinas como fans, compressores e turbinas estão entre as mais importantes fontes de ruído aeroacústico. Tipicamente, a interação aeroacústica entre as pás do rotor e estator de turbofans aeronáuticos geram ruídos tonais que se propagam ao longo do duto da nacele e tem grande contribuição no ruído aeronáutico total gerado por aeronaves modernas. Os modos acústicos gerados dessa interação dependem do número de pás do rotor e do estator, conhecido como relação de Tyler e Sofrin. Nesse sentido, liners acústicos empregados nas paredes na nacele são comumente utilizados para controle de ruído, utilizando o mecanismo de ressonadores de Helmholtz para atenuação acústica. Nesse trabalho, será feita uma investigação analítica dos modos acústicos em dutos resultantes da interação entre rotor-estator. Esse modelo será então utilizado para analisar o desempenho de atenuação de ruído de liners utilizando modelos clássicos de impedância na parede da nacele. Espera-se com esse trabalho, propor uma metodologia analítica de projeto com baixo custo computacional para o auxílio no desenvolvimento de métodos numérico de alto desempenho.

Abstract

Turbo machines such as fans, compressors and turbines are among the most important sources of aeroacoustic noise. Typically, the aeroacoustic interaction between the rotor and stator blades of aeronautical turbofan generates tonal noises that propagate along the nacelle duct and has great contribution in the total aeronautical noise generated by modern aircraft. The acoustic modes generated from this interaction depend on the number of blades of the rotor and the stator, known as the Tyler and Sofrin relationship. In this sense, acoustic liners used in the nacelle walls are commonly used for noise control, using the Helmholtz resonator mechanism for acoustic attenuation. In this work, an analytical investigation of the acoustic modes in ducts resulting from the rotor-stator interaction will be done. This model will then be used to analyze the noise attenuation performance of liners using classical models of impedance on the nacelle wall. He hopes to propose a low cost computational design methodology for the development of high performance numerical methods.

Lista de Figuras

Figura 1 – Esquema dos três pontos de referência para a certificação de aeronaves (SMITH, 2004)	2
Figura 2 – Esquema dos tipos de turbinas à jato e suas aplicações (SMITH, 2004)	3
Figura 3 – Diagrama de comparação entre a radiação do som em motores de baixa e alta razão de bypass (SPILLERE et al., 2017)	4
Figura 4 – Representação esquemática do posicionamento de liners em turbofans de alta razão de bypass (SPILLERE et al., 2017)	5
Figura 5 – Esquema de liner acústico de uma placa perfurada (PASCUAL, 2016)	6
Figura 6 – Esquema de um ressonador de Helmholtz (SPILLERE et al., 2017)	7
Figura 7 – Esquema de um liner de um gral de liberdade (MOTSINGER; KRAFT, 1991)	8
Figura 8 – Esquema de um liner de dois graus de liberdade (MOTSINGER; KRAFT, 1991)	8
Figura 9 – Esquema de um absorvedor bulk (MOTSINGER; KRAFT, 1991)	8
Figura 10 – Exemplificação de regiões não-lineares e lineares em aerofólio (MASON, 2006)	14
Figura 11 – Esquema de turbofan considerado para a solução da equação da onda (PIMENTA, 2016)	18
Figura 12 – Dutos sem e com o corpo central representando a ausência ou não do cubo do rotor (GLEGG; DEVENPORT, 2017)	22
Figura 13 – Valores de σ_{mn} para um duto circular e anular (PIMENTA, 2016)	23
Figura 14 – Diagrama de lugar das raízes duto circular sem escoamento	46
Figura 15 – Diagrama de lugar das raízes duto circular com escoamento	47
Figura 16 – Diagrama de lugar das raízes duto anelar sem escoamento	47
Figura 17 – Diagrama de lugar das raízes duto anelar com escoamento	48
Figura 18 – Formato do acústico para $m = 1$ e $n = 1$	49
Figura 19 – Formato do acústico para $m = 1$ e $n = 2$	49
Figura 20 – Formato do acústico para $m = 1$ e $n = 3$	49
Figura 21 – Formato do acústico para $m = 1$ e $n = 4$	50
Figura 22 – Formato do acústico para $m = 4$ e $n = 1$	50

Figura 23 – Formato do acústico para $m = 4$ e $n = 2$	51
Figura 24 – Formato do acústico para $m = 4$ e $n = 3$	51
Figura 25 – Formato do acústico para $m = 4$ e $n = 4$	51
Figura 26 – Formato do acústico para $m = 7$ e $n = 1$	52
Figura 27 – Formato do acústico para $m = 7$ e $n = 2$	52
Figura 28 – Formato do acústico para $m = 7$ e $n = 3$	53
Figura 29 – Formato do acústico para $m = 7$ e $n = 4$	53
Figura 30 – Formato do acústico para $m = 14$ e $n = 1$	54
Figura 31 – Formato do acústico para $m = 14$ e $n = 2$	54
Figura 32 – Formato do acústico para $m = 14$ e $n = 3$	54
Figura 33 – Formato do acústico para $m = 14$ e $n = 4$	55
Figura 34 – Formato do modo acústico para $m = 1$ e $n = 4$	55
Figura 35 – Duto Anelar-diferença	56
Figura 36 – Flutuação de Pressão	56
Figura 37 – Formato do modo acústico para $m = 14$ e $n = 4$	57
Figura 38 – Duto Anelar-diferença	57
Figura 39 – Flutuação de Pressão	58
Figura 40 – Curva de dispersão para o modo $m = 4$ e n de 1 à 4	59
Figura 41 – Curva de dispersão para o modo $m = 14$ e n de 1 à 4	59
Figura 42 – Curva de dispersão para o modo $m = 4$ e n de 1 à 4 com impedância	60
Figura 43 – Curva de dispersão para o modo $m = 14$ e n de 1 à 4 com impedância	60

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Comparação entre os números de onda axial adimensional λ direção positiva	44
Tabela 2 – Comparação entre os números de onda axial adimensional λ direção negativa	44
Tabela 3 – Autovalores calculados para um duto circular caso $He = 1$, $M = 0.5$, $A = 0.72 + 0.42i, m = 2$	45

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Reação Humana ao Ruído de Aeronaves	1
1.2	Esquema de Certificação de Ruído	2
1.3	Fontes de Ruído em Aeronaves	3
1.4	Liners	5
1.5	Objetivos	6
2	LINERS ACÚSTICOS	7
3	GERAÇÃO E PROPAGAÇÃO DE RUÍDO EM DUTOS	10
3.1	Linearização das Equações Governantes	13
3.2	Equação da Onda	16
3.3	Solução da Equação de Onda	17
3.4	Ruído da interação rotor-estator	25
3.5	Propagação do ruído tonal em dutos	27
4	CONDIÇÃO DE CONTORNO GERAL PARA UMA PAREDE FLEXÍVEL	31
4.1	Derivação da Condição de Contorno	31
4.1.1	Linearização da Condição de Contorno	33
4.2	Manipulação e Análise da Condição de Contorno Linearizada	34
4.3	Solução da Equação de Onda para um Duto com Impedância Acústica finita na Parede	38
4.3.1	Condição de Contorno para um Liner Localmente Reativo em um Duto com Escoamento	38
4.3.2	Solução Modal Analítica para um Duto Anelar com Impedância finita na parede e escoamento uniforme	40
5	EFEITOS DO LINER NA PROPAGAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA	43
5.1	Cálculo dos números de onda radiais e circunferenciais	43
5.2	Diagrama de lugar das raízes para os números de onda axial	46

5.3	Forma do modos acústicos	48
5.3.1	Análise dos modos acústicos para o caso hardwall	48
5.3.2	Análise dos modos acústicos para o caso softwall	55
5.4	Curvas de dispersão	58
6	CONCLUSÃO	62
	REFERÊNCIAS	63
A	TEORIA DE COORDENADAS CURVILÍNEAS	65
B	CÓDIGOS EM MATLAB	68

1 INTRODUÇÃO

1.1 Reação Humana ao Ruído de Aeronaves

Diversos fatores e condicionantes do ambiente implicam em reações emocionais nos seres humanos, desde a limpeza e quantidade de luz à segurança e ruído. Um dos fatores mais indesejados e incômodos na vida em uma comunidade urbana é o ruído. Nestes termos o ruído gerado por aeronaves perdem apenas para o ruído gerado pelo tráfego urbano e em localidades rurais, em grande parte das vezes, este tipo de ruído é listado como o mais insociável.

O crescimento rápido da aviação civil ajudou ainda mais a intensificar tal problema já que a quantidade de voos saindo e chegando dos aeroportos incrementou a exposição das pessoas a esse tipo de situação(SMITH, 2004). Mesmo que as aeronaves tiveram uma tendencia a se tornarem progressivamente mais silenciosas desde a introdução dos turbofans nos ano 1960's e 1970's, a redução proporcionada pelas novas tecnologias não mitigaram o suficiente os problemas e impactos causados pelo ruídos de aeronaves.

Embora os níveis de exposição ao ruído possam ser quantificados por variáveis físicas, a reação de cada pessoa pode variar pois depende do nível de tolerância de cada indivíduo. Muitas vezes a relação humana com o ruído não é simplesmente o produto dos fatores físicos como a valor absoluto do ruído, tempo ou frequência com que este ocorre, o quanto dura ou sua composição espectral, mas muitas vezes está relacionado a aspectos subjetivos do ser humano. Desta forma, para fins de controle todos os aspectos, objetivos ou não, devem ser abarcados em um indicador de forma a quantificar e julgar os impactos que os ruídos provenientes de aeronaves causam.

Assim, agências regulamentadoras nacionais e internacionais começaram a impor regras para os aeroportos localizados em regiões residenciais e habitacionais. Como estas restrições não foram suficientes para que os níveis de ruído fossem controlados, os modelos de aeronaves que podem operar em um dado aeroporto foram restringidos. Processos de certificação para os novos modelos foram adotados onde um dado nível de ruído é permitido para cada classe de aeronaves.

1.2 Esquema de Certificação de Ruído

O advento dos motores tubofan de baixa razão de bypass em aeronaves comerciais, elevaram a aviação comercial à um novo patamar. Motores mais potentes e um maior número de voos revelaram um problema antes não tão abordado que é barulho excessivo das aeronaves. Em resposta a reação negativa da sociedade em relação a tais condições, autoridades desenvolveram um conceito implementado no início da década de 1970, que é a certificação de aeronaves (SMITH, 2004).

O processo de certificação envolve tanto requerimentos em relação à segurança quanto ao nível de ruído produzido. Como discutido na seção anterior a resposta de cada indivíduo ao ruído é variável e está atrelada a diversos fatores. Assim, desenvolveu-se uma métrica que visa quantificar essa resposta o Effective Perceived Noise Level. Tal métrica leva em conta o conteúdo espectral, presença de tons e duração do ruído, bem como a resposta do indivíduo ao ruído visando uma forma mais representativa do quão insociável é um ruído.

Para a certificação, o ruído radiado pela aeronave é medido por microfones localizados em determinadas posições no solo. O processo de medição se dá com a aeronave voando pelos pontos de referência dentro de condições padrão pré-determinadas.

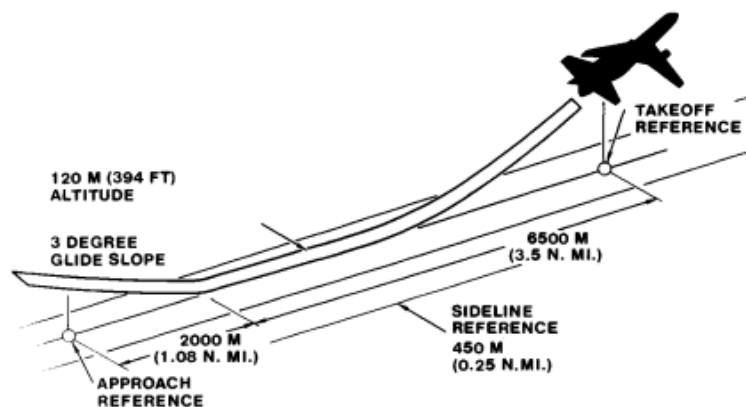


Figura 1 – Esquema dos três pontos de referência para a certificação de aeronaves (SMITH, 2004)

Após as medições, os valores medidos nos três estágios são comparados com os valores normatizados para aquele tipo de aeronave. Caso a aeronave tenha um nível de ruído maior do que o permitido em qualquer um dos três pontos de medição, a aeronave é reprovada no processo de certificação e não possui permissão para operar em qualquer aeroporto civil.

1.3 Fontes de Ruído em Aeronaves

O termo jato foi inicialmente um termo coloquial para se referir à aeronaves movidas por motores de turbinas à gás sem propulsores, como as que entraram em serviço com o Comet nos anos 1950. Hoje, tal denominação cobre também as aeronaves com os modernos motores turbofan, já que estes também não possuem um propulsor visível e também contam com a energia proveniente do escoamento que exaurido pelo bocal localizado na parte traseira das turbinas como força motora (SMITH, 2004).

Em motores a jato típicos de 50 kN de empuxo, cerca de 40 Kg de ar por segundo são absorvidos pelo sistema de compressão e então misturado com o combustível e queimado. Na saída do sistema de combustão uma turbina extrai energia o suficiente para mover o compressor, que estão ligados pelo mesmo eixo, antes que o jato seja expelido pelo bocal à uma velocidade de aproximadamente 600 metros por segundo (SMITH, 2004). Ou seja, a força propulsiva é simplesmente a força restante no jato após este superar todas forças que se opõem à ele na nacele do motor.

Uma alta velocidade de jato é uma característica essencial para que se possa voar à velocidades muito altas como em voos supersônicos. A aceleração de uma pequena massa de ar não é o processo aerodinâmico mais efetivo porém, dado os materiais disponíveis na época da invenção das turbinas a jato, este era um dos poucos processos possíveis. Com a evolução dos materiais e das tecnologias de resfriamento dos motores, foi possível a produção de pás mais eficientes e assim o ciclo bypass sofreu melhoras em sua eficiência propulsiva. O ciclo bypass requer aproximadamente 50% de ar para cada unidade de empuxo gerado, o que por consequência diminui a velocidade de exaustão (SMITH, 2004).

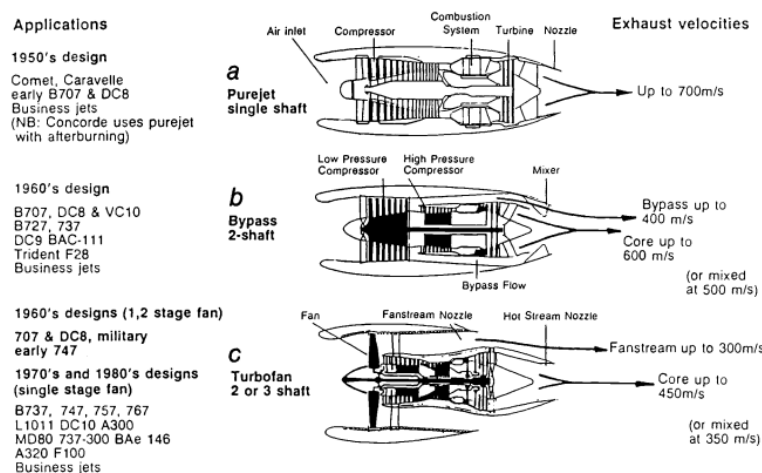


Figura 2 – Esquema dos tipos de turbinas à jato e suas aplicações (SMITH, 2004)

Conforme a parte b da figura 2 mostra que o motor com bypass divide uma grande entrada de ar em duas correntes similares, usando uma destas para alimentar a câmara de combustão que neste caso é menor porém, mais eficiente que tem uma velocidade de

exaustão similar a de um motor à jato puro. A outra corrente é mantida a baixa pressão e escoar por um duto separado sendo é exaurida por um bocal diferente a uma velocidade menor.

Os turbofans modernos como o esquema c da figura 2 representa, utilizam níveis de bypass ainda maiores utilizando um grande fan que é movido por uma ainda mais eficiente turbina à gás refrigerada à ar que opera em temperatura e pressões ainda mais altas. Esta tecnologia permite cerca de três a quatro vezes mais ar para cada unidade de empuxo gerado, comparativamente com o jato puro. Desta quantidade de ar apenas cerca de 10% é utilizado na geração de gás para turbina. O fan promove uma pequena compressão no ar e a velocidade de saída do jato do fan é por volta de 300 metros por segundo, sendo a mais baixa de todos os casos. A razão de compressão no núcleo gerador de gás é alta, porém há a extração de energia para a mover o fan e os compressores o que resulta em uma velocidade de saída do jato quente entre 400 e 500 metros por segundo

Como as fontes de ruído aerodinâmico estão intrinsecamente relacionadas com a velocidade, e o aumento da razão de bypass faz com que as velocidade caiam o ruído para estes tipos de motores é menor. A potência dos motores também está relacionada proporcionalmente com a razão de bypass porém, o ruído gerado pelo fan, compressor intermediário e sistema de turbina também aumentam com o incremento da razão de bypass. Tal cenário muda não somente a composição do ruído mas também a diretividade com campo acústico, como pode-se observar na figura 3.

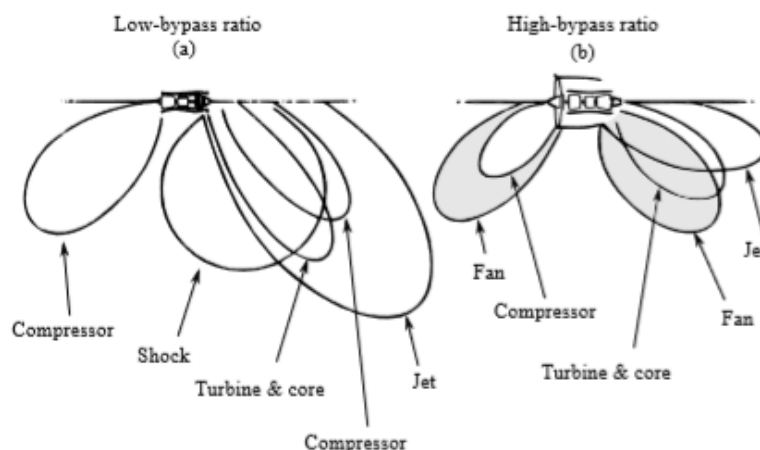


Figura 3 – Diagrama de comparação entre a radiação do som em motores de baixa e alta razão de bypass (SPILLERE et al., 2017)

Se nos motores à jato puro ou com baixa razão de bypass a principal fonte de ruído era a exaustão do jato, nos motores turbofan como as velocidades são menores porém, para a manutenção do mesmo empuxo, o raio do duto deve ser maior e consequentemente o fan deve ser maior assim o fan tornou-se uma das fontes predominantes de ruído.

Como todas as máquinas rotativas o fan e os compressores irão emitir som com características de banda larga e tonais. A componente tonal é a componente penalizada pela

métrica da EPNL já que, são extremamente insociáveis por possuírem um característica não encontrada na natureza.

O ruído de banda larga é resultado da propagação do som produzido próximo à superfície das pás como resultado das flutuações de pressão associadas ao escoamento turbulento nas vizinhanças. A turbulência em geral é induzida em qualquer situação em que há escoamento sobre um superfície sólida ou quando há descontinuidades entre dois escoamentos. A geração do ruído tonal é extremamente complexa e advém do efeito interativo entre as perturbações no escoamento no caminho de rotação das pás.

A maior parte do ruído gerado por turbofans de alta razão de bypass é produto da interação entre as pás do rotor e do estator. Os campos de pressão e vorticidade gerados pelas pás do rotor interagem com as pás do estator gerando um ruído com componentes tonal e banda larga. A componente tonal está associada com a natureza cíclica da interação devido a frequência de passagem das pás e seus harmônicos. Já o ruído de banda larga está associado com as componentes não cíclicas destas interações(PIMENTA, 2016).

1.4 Liners

Como a presença de ruído tonal é penalizada pela métrica da EPNL, uma das soluções adotadas pelos fabricantes de turbinas foi o uso de dispositivos de controle passivo nas paredes do motor aeronáutico. Os painéis de tratamento acústico utilizados são conhecidos como liners acústicos e são geralmente dispostos no turbofan conforme a figura 5

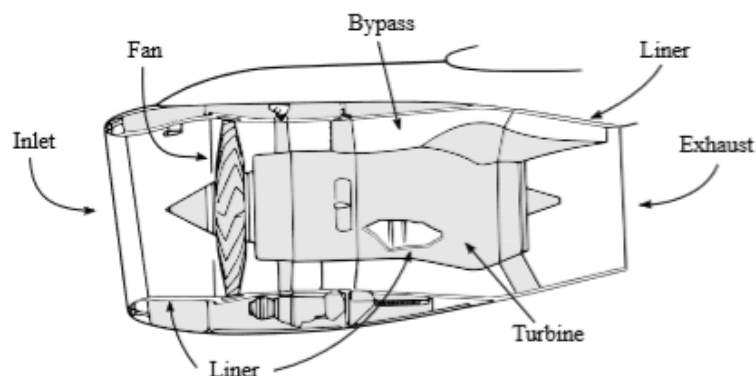


Figura 4 – Representação esquemática do posicionamento de liners em turbofans de alta razão de bypass (SPILLERE et al., 2017)

Os liners são geralmente compostos três camadas, a primeira é uma placa perfurada que está exposta ao escoamento, a segunda é uma estrutura intermediária em formato de colmeia e a última uma placa rígida. Esta construção pode ser vista como um vetor de ressonadores de Helmholtz onde os furos de uma das placas representam a garganta do ressonador e os honeycombs (estrutura intermediária em formato de colmeia) as cavidades.

Esta configuração é conhecida como liner acústico de 1 grau de liberdade já que o ar que oscila na garganta do ressonador pode ser modelado como uma massa e o ar na cavidade age com uma mola. A ideia fundamental no projeto de um liner é aproximar a máxima frequência de atenuação ao tom fundamental do fan. (BIELAK; HERSH, 1999).

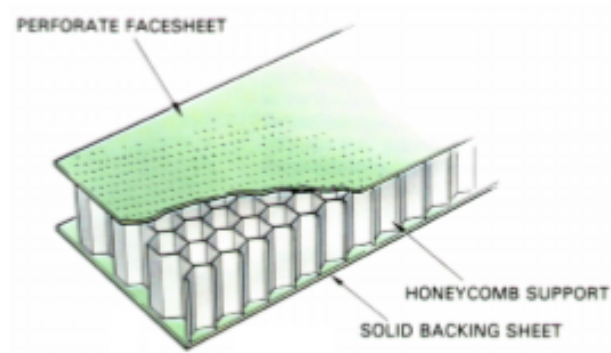


Figura 5 – Esquema de liner acústico de uma placa perfurada (PASCUAL, 2016)

A performance do liner é afetada pelas condições de operação, velocidade do escoamento, nível de pressão sonora, entre outros. A forma usual de abordagem do problema de liners é pela impedância acústica que pode ser relacionada como função da geometria, temperatura do ar e velocidade do escoamento. Mesmo os liners tendo geometria fixa, as condições de velocidade e de nível de pressão sonora variam, especialmente nas condições de aterrissagem e decolagem o que leva a diferenças nos valores de impedância acústica. Tal fato deve ser levado em consideração durante o projeto dos liners. A propagação de ondas também é afetada pela presença de escoamento logo a atenuação no liner também é afetada.

1.5 Objetivos

Este trabalho visa realizar uma investigação analítica dos modos acústicos em dutos resultantes da interação rotor-estator, para que a partir deste modelo, possa-se analisar o desempenho da atenuação de ruído feita pelos liners. São utilizados os modelos clássicos de impedância de liners na parede da nacele e assim criar arcabouço para uma metodologia analítica de baixo custo computacional que seja aplicável à métodos numéricos de alto desempenho.

2 Liners Acústicos

Os liners acústicos são utilizados na atenuação do ruído proveniente dos motores aeronáuticos. Estes dispositivos geralmente são colocados nas paredes internas da nacele. Os liners são elementos de tratamento acústico passivos e uma forma conveniente de analisá-los, é considera-los como conjunto de de ressonadores de Helmholtz onde os principais parâmetros são o diâmetro do furo d , a profundidade da cavidade l e a espessura da placa t . Comumente, cada célula honeycomb tem mais de um furo, logo a porcentagem de área aberta da placa perfurada é considerada como um parâmetro geométrico.

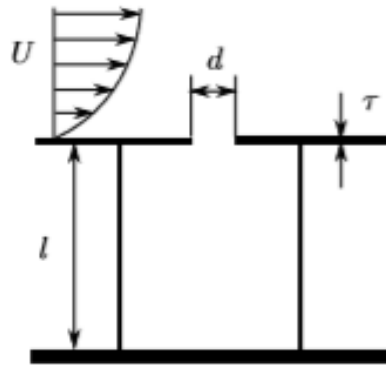


Figura 6 – Esquema de um ressonador de Helmholtz (SPILLERE et al., 2017)

A atenuação promovida pelos liners pode ser analisada através das perdas de inserção ou dos coeficientes de transmissão e reflexão que dependem da região e da geometria do tubo. Por isso a forma usual de abordagem dos problema de liners é pelos meios da impedância acústica, que é definida pela razão entre a pressão sonora e a velocidade de partícula.

$$Z(w) = \frac{p}{u} = R + iX \quad (2.1)$$

A impedância acústica é um número complexo cuja parte real é relacionada a energia na placa perfurada e é denominada resistência e a parte imaginária denominada reatância relacionada com os efeitos inerciais na cavidade. A impedância resistiva é função somente da configuração da placa perfurada, enquanto a impedância reativa possui relação com a configuração da placa perfurada e com a profundidade da cavidade.

A reatância da cavidade influencia fortemente as características do liner. Com o aumento da frequência para acima da primeira frequência de ressonância ($X = 0$ aproximadamente onde a atenuação é máxima), a reatância se aproxima de infinito positivo. Em frequências menores do que a primeira ressonância, a reatância se aproxima do infinito negativo (BIELAK; HERSH, 1999).

A depender do faixa de frequências que a atenuação é necessária deve-se escolher o tipo de tratamento aplicável ao caso. Os tipos de liners mais comuns são: os liners de um grau de liberdade, dois graus de liberdade e absorvedor bulk.

Conforme descrito na seção 1.4 descrito o liner de um grau de liberdade consiste em apenas uma construção de uma placa porosa e uma placa rígida separadas por uma estrutura em honeycomb conforme pode-se observar na figura 7. Já o liner de dois graus de liberdade, apresentado na figura 8 possui uma placa porosa intermediária, sendo que este conceito pode ser estendido à múltiplas camadas. O absorvedor bulk, figura 9 possui entre a placa porosa e a rígida um material fibroso e poroso no lugar da estrutura em honeycomb comumente utilizada nos outros tipos de liners

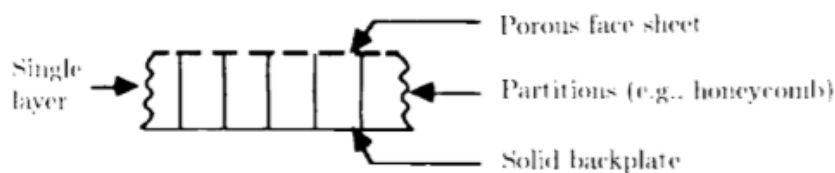


Figura 7 – Esquema de um liner de um grau de liberdade (MOTSINGER; KRAFT, 1991)

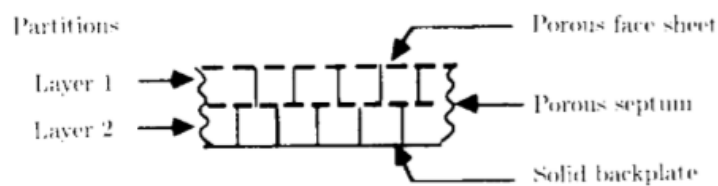


Figura 8 – Esquema de um liner de dois graus de liberdade (MOTSINGER; KRAFT, 1991)

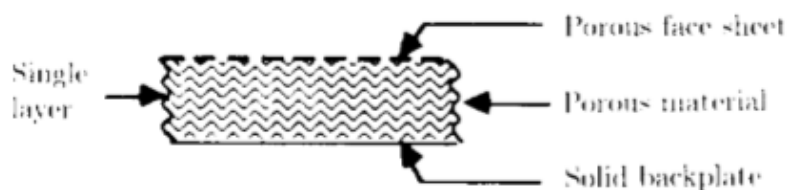


Figura 9 – Esquema de um absorvedor bulk (MOTSINGER; KRAFT, 1991)

O liner de um grau de liberdade é o que possui menor faixa de frequência para atenuação porém, possui uma alta atenuação nesta faixa, sendo assim este é o tipo de liner mais estudado e largamente implementado em aeronaves. Os principais mecanismos de dissipação do liner de um grau de liberdade é o amortecimento da onda acústica nas paredes do orifício e a ressonância de um quarto do comprimento de onda na célula (SPILLERE et al., 2017). Caso a onda acústica esteja em regime linear ocorre o desenvolvimento de um escoamento laminar no orifício do ressonador, enquanto que em regimes não lineares pode-se observar a formação de um jato turbulento, o que leva a impedância acústica a ser sensível ao nível de pressão sonora (ZHANG; BODONY, 2016).

Em liners de dois graus de liberdade a faixa de frequências atenuadas é maior porém, a atenuação máxima é menor (MOTSINGER; KRAFT, 1991). A expansão desse conceito para um liner de múltiplos graus de liberdade utilizando-se várias placas intermediárias permite que se atinja a configuração de atenuação desejada porém, devido às restrições de espaço e peso na nacele dos turbofans esta opção se torna inviável na aviação comercial.

O atenuador bulk possui uma ampla faixa de atenuação podendo se estender à até três oitavas. Seus parâmetros de atenuação dependem do diâmetro da fibra e da densidade do material usado e da profundidade da cavidade, tais relações são especialmente impactantes na atenuação de ruídos de alta frequência. Devido a grandes dificuldades em seu projeto comercial, o atenuador bulk ainda não é utilizado na aviação comercial (MOTSINGER; KRAFT, 1991).

3 Geração e Propagação de Ruído em Dutos

Neste capítulo, serão desenvolvidas as equações que regem analiticamente os fenômenos de geração e propagação de ondas em dutos. Tal teoria será descrita a partir das equações governantes da mecânica dos fluídos.

Em um problema aeroacústico, os princípios utilizados são o de conservação da massa, da variação da quantidade de movimento (segunda lei de newton), e a equação da energia (primeira lei da termodinâmica).

Utilizando-se o teorema transporte de Reynolds é possível obter a forma diferencial para os três princípios já que, o Teorema de Transporte de Reynolds relaciona uma quantidade conservada de um volume de controle onde o fluxo desta quantidade é contabilizado na superfície bem como a transformação desta propriedade dado o fenômeno que ocorre dentro do volume de controle. Avaliando-se os três princípios tem-se mais variáveis do que equações, logo são necessárias relações constitutivas que nos permitam obter a resolução do sistema. As equações constitutivas utilizadas são a lei de Fourier para condutividade térmica, a lei dos gases ideais, já que o fluido para o caso estudado é o ar que pode ser caracterizado como ideal dada as circunstâncias, newtoniano e caloricamente perfeito e também a lei de Southerland para viscosidade.

As equações que regem o fenômeno são altamente não-lineares devido a presença dos termos advectivos, tal situação torna a solução destas equações extremamente difícil. Um grande exemplo disto é a equação da variação da quantidade do movimento também conhecida como equação de Navier-Stokes, que é conhecida a mais de 100 anos e não possui prova de solução nem unicidade destas para todas as situações reais.

Trabalhando-se a equação da conservação da massa, também conhecida como equação de continuidade temos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.1)$$

Em notação indicial temos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.2)$$

Aplicando-se a regra do produto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0, \quad (3.3)$$

e definindo-se a derivada material como

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right), \quad (3.4)$$

temos que a equação da continuidade assume forma

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.5)$$

Aplicando-se o princípio da variação da quantidade de movimento para um fluido temos que

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{P} + \rho(\mathbf{u}\mathbf{u})) = \mathbf{f}. \quad (3.6)$$

Passando-se a equação para notação indicial e trabalhando-a algebricamente temos que:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{P_{ij}}{\partial x_i} + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + u_j \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) = f_i. \quad (3.7)$$

Avaliando-se os termos multiplicados pela velocidade observamos que a soma destes resultam na equação da continuidade que logo resultam em zero. Desta forma, a equação assume a seguinte forma

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{P}) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.8)$$

onde \mathbf{P} é dado por

$$\mathbf{P} = p\mathbf{I} - \tau. \quad (3.9)$$

O termo p é relacionado ao campo de pressão e o tensor τ é o tensor de tensões viscosas, aplicando-se a hipótese de Stokes, tem-se que

$$\tau = \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - \frac{2}{3}\mu((\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}), \quad (3.10)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido Aplicando-se o divergente sobre \mathbf{P} , tem-se que

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla \cdot (p\mathbf{I} + \tau) = \nabla \cdot (p\mathbf{I}) + \nabla \cdot (\tau) \quad (3.11)$$

e operando-se o primeiro termo da equação, resulta em

$$\nabla \cdot (p\mathbf{I}) = \nabla p. \quad (3.12)$$

Logo, assumindo-se que o termo fonte é igual a zero, isto é $\mathbf{f}=0$, e desprezando-se os termos difusão viscosa, $\tau = \mathbf{0}$, obtemos a seguinte equação para a variação da quantidade de movimento

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p, \quad (3.13)$$

que é denominada a equação de Navier-Stokes sem o termo fonte.

Aplicando-se o Teorema do Transporte de Reynolds pra energia total do sistema e fazendo-se as devidas operações obtemos a seguinte equação:

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (p \mathbf{I} \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) + \nabla \dot{q}, \quad (3.14)$$

onde

$$e_t = \left(e + \frac{u^2}{2}\right). \quad (3.15)$$

Os efeitos difusivos serão desprezados para esta análise ($\tau = 0$ e $\dot{q} = 0$) já que, a princípio estes não contribuem para a geração de ruído. Portanto, obtêm-se a seguinte forma da equação da variação da energia,

$$\rho \frac{\partial e_t}{\partial t} + e_t \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} e_t)}_1 = -\nabla \cdot (P \mathbf{I} \cdot \mathbf{u}). \quad (3.16)$$

Expandindo-se o termo 1 da equação 3.16, tem-se

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} e_t) = e_t \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla (e_t). \quad (3.17)$$

Obtendo-se assim a seguinte expressão

$$\rho \frac{\partial e_t}{\partial t} + \underbrace{e_t \frac{\partial \rho}{\partial t} + e_t \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})}_{\text{sublinhado}} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e_t = -\nabla \cdot (p \mathbf{I} \cdot \mathbf{u}). \quad (3.18)$$

Os termos sublinhados resultam na equação da continuidade portanto podemos igualar tal soma a zero. Logo a equação da energia toma a seguinte forma:

$$\rho \frac{\partial e_t}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla (e_t) = -\nabla \cdot (p \mathbf{I} \cdot \mathbf{u}). \quad (3.19)$$

Assim, aplicando-se a definição de derivada material tem-se que

$$\rho \frac{De_t}{Dt} = -\nabla \cdot (p \mathbf{I} \cdot \mathbf{u}). \quad (3.20)$$

Utilizando-se a notação indicial expandindo-se a formada da equação da energia dada por 3.20 utilizando-se a relação 3.15 tem-se que

$$\rho \left(\frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} u_i u_i \right) \right) = - \frac{\partial p u_i}{\partial x_i}. \quad (3.21)$$

Aplicando-se a regra da cadeia na equação 3.21, obtêm-se que

$$\rho \left(\frac{De}{Dt} + u_i \frac{Du_i}{Dt} \right) = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (3.22)$$

Aplicando-se a definição de derivada material à equação 3.13, em notação indicial chega-se à

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (3.23)$$

Substituindo a equação 3.23 na equação 3.22, logo

$$\rho \left(\frac{De}{Dt} - \frac{u_i}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = -u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \quad (3.24)$$

Simplificando-se a equação 3.24

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \quad (3.25)$$

O escoamento considerado é totalmente subsônico para baixos níveis de compressibilidade logo, as discontinuidades nas variáveis do escoamento devido ondas de choques não existirão. Os efeitos dissipativos da transferência de calor e da viscosidade também são desprezados. Assim, pode-se utilizar a lei fundamental da termodinâmica para um processo reversível que preconiza que

$$Tds = de + pd(\rho^{-1}). \quad (3.26)$$

Desenvolvendo-se o termo $d(\rho^{-1})$ da equação 3.26 observa-se que

$$d\rho^{-1} = \frac{1}{\rho^2} d\rho. \quad (3.27)$$

Substituindo o desenvolvimento da equação 3.27 na equação 3.26 obtêm-se que

$$de = Tds - \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (3.28)$$

Então, da equação 3.24 combinada com a relação 3.28, tem-se que

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -p \left(\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right). \quad (3.29)$$

Analisando a equação 3.29, o lado direito é igual a equação da continuidade o que implica em ser igual a zero desta forma

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (3.30)$$

A equação 3.30 implica que o fenômeno é isentrópico desta forma, para um regime subsônico, sem tensões viscosas ou transferência de calor a equação da energia se desacopla das demais, tornando-se independente.

3.1 Linearização das Equações Governantes

A linearização das equações governantes dará a partir da decomposição das variáveis do sistema de equações governantes 3.1 e 3.13 em termos de valores médios e valores de flutuação. Assim, para uma propriedade ϕ tem-se que

$$\phi = \phi_0 + \phi', \quad (3.31)$$

onde ϕ_0 é do valor médio dado por

$$\phi_0 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi dt, \quad (3.32)$$

e ϕ' é o valor da flutuação.

A hipótese principal para a linearização considera que os valores das flutuações são muito menores do que os valores médios das propriedades, desta forma sabe-se que as equações obtidas a partir de tais considerações só serão válidas em regiões onde o fenômeno possui essas características. É sabido também que a maioria dos fenômenos aeroacústicos possuem grandes regiões de não-linearidade e que a determinação de a partir de onde ocorre a linearização do evento é de grande dificuldade. Ilustrando-se tal situação, considera-se o caso de ruído gerado em um aerofólio, 10.

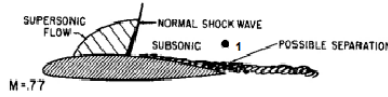


Figura 10 – Exemplificação de regiões não-lineares e lineares em aerofólio (MASON, 2006)

A região do ponto 1 da figura 10 é uma região onde percebe-se a presença de uma onda choque e uma esteira de vórtices, isto implica em uma região onde as flutuações das propriedades são da ordem do valor médio destas, tal região é caracterizada como altamente não linear. Já a região do ponto 2 encontra-se suficientemente longe fonte, fazendo com que as flutuações das propriedades sejam muito menores que os valores médios desta. Aplicando-se a decomposição 3.31 à equação da continuidade na forma da equação 3.1 temos que,

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho')(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}')] = 0, \quad (3.33)$$

expandindo-se, tem-se que

$$\frac{\rho_0 + \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho_0 \mathbf{u}_0 + \rho_0 \mathbf{u}' + \rho' \mathbf{u}_0 + \rho' \mathbf{u}')] = 0. \quad (3.34)$$

Como as flutuações das propriedades são muito menores que os valores médios das propriedades os termos de segunda ordem serão desprezados, logo chega-se que

$$\frac{\rho_0 + \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho_0 \mathbf{u}_0 + \rho_0 \mathbf{u}' + \rho' \mathbf{u}_0)] = 0. \quad (3.35)$$

Separando-se os termos a equação toma a seguinte forma

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}') + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_0) + \nabla \cdot (\rho' \mathbf{u}_0) = 0. \quad (3.36)$$

Aplicando-se a mesma decomposição à um escoamento permanente sem flutuações obtêm-se a seguinte equação

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_0) = 0. \quad (3.37)$$

Substituindo a equação 3.37 na equação 3.36 e expandido as relações, tem-se que

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \rho_0 + \rho' \nabla \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \rho' = 0. \quad (3.38)$$

Agora, faz-se a hipótese de que os valores médios das propriedades não variam com o tempo ou com espaço o que resulta em uma solução de corrente livre para o escoamento médio. Tal hipótese implica que o ponto de observação não sofre influência dos valores médios das propriedades, esta situação pode ser ilustrada como a visualização da passagem de um avião onde o observador consegue escuta-lo porém o campo de pressão gerado por tal fenômeno não é percebido. Logo, chega-se a forma final da equação da continuidade linearizada

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \rho' = 0. \quad (3.39)$$

A linearização da equação da variação da quantidade de movimento 3.13 se dá seguindo as mesmas hipóteses e princípios assim, aplicando-se a decomposição 3.31 tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\rho_0 + \rho')(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}')] + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho')(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}') \otimes (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}')] = -\nabla(p_0 + p'). \quad (3.40)$$

Expandindo-se e desprezando-se os termos de segunda ou maior ordem, tem-se que

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 + \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}' + \rho' \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 + \rho_0 \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}_0 + \nabla p_0 + \nabla p' = 0. \quad (3.41)$$

Agora, novamente, aplicando-se a decomposição para um escoamento permanente e sem flutuações a segunda lei de Newton toma a seguinte forma

$$\rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 = -\nabla p_0. \quad (3.42)$$

Substituindo a equação 3.42 na equação 3.41 e novamente assumindo que os termos médios não variam nem com o tempo nem com o espaço, tem-se que

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \rho_0 \mathbf{u}_0 \nabla \cdot \mathbf{u}' = -\nabla p'. \quad (3.43)$$

Assim, chega-se às equações governantes linearizadas dadas pelas relações 3.39 e 3.43.

3.2 Equação da Onda

Para obtenção da equação da onda, utiliza-se as equações governantes linearizadas na seção anterior, primeiramente tira-se a derivada temporal da equação da continuidade no 3.39 e chega-se à

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}') + u_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \rho') = 0. \quad (3.44)$$

Agora, toma-se o divergente da equação da variação da quantidade de movimento 3.43 obtêm-se que

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}') + \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla^2 \mathbf{u}' + \nabla^2 p' = 0. \quad (3.45)$$

Subtraindo-se a equação 3.45 da equação 3.44, chega-se que

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \mathbf{u}_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \rho') - \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla^2 \mathbf{u}' - \nabla^2 p' = 0. \quad (3.46)$$

O termo do laplaciano de velocidade pode ser substituído por

$$\nabla^2 \mathbf{u}' = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}') - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}'). \quad (3.47)$$

Tal substituição pode ser provada expandindo-se o lado esquerdo da seguinte identidade vetorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla \cdot (\nabla \mathbf{f}). \quad (3.48)$$

Expandindo-se

$$\begin{aligned} & \left(\hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \times \left(\left(\hat{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \times f_k \hat{e}_k \right) = \\ & \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i} \hat{e}_m \delta_{jm} \delta_{ki} - \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i} \hat{e}_m \delta_{ji} \delta_{km} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_i} \hat{e}_j - \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_i} \hat{e}_k \\ & \therefore \nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla \cdot (\nabla \mathbf{f}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Logo, avaliando-se os termos da equação 3.47, observa-se que o termo rotacional é nulo já que o rotacional da flutuação de velocidade do campo acústico é nulo. Logo têm-se que o termo sublinhado da equação 3.46 toma a seguinte forma

$$-\rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla^2 \mathbf{u}' = \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}'). \quad (3.50)$$

Da equação da continuidade temos que

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = \frac{-1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \rho' \right). \quad (3.51)$$

Substituindo-se 3.50 e a equação 3.51 na equação 3.46 e rearranjando-se os termos, tem-se que

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + 2\mathbf{u}_0 \cdot \nabla (\nabla \rho') + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \rho') - \nabla^2 p' = 0. \quad (3.52)$$

Agora, aplicando-se a seguinte relação vetorial

$$\nabla (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f} + \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}). \quad (3.53)$$

E novamente, considerando que o escoamento é irrotacional e sabendo que o rotacional de um gradiente é sempre zero. Pode-se combinar a identidade vetorial e a equação 3.52 e considerando-se novamente que os termos médios do escoamento não variam com o espaço, chega-se que

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + 2\mathbf{u}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \rho') + \mathbf{u}_0 \cdot ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \nabla \rho') - \nabla^2(p') = 0. \quad (3.54)$$

A equação 3.30 preconiza que a entropia da partícula se mantém constante o que é uma consequência da negligenciabilidade da transferência de calor no escoamento de um gás sem atrito. A transferência de calor e a transferência de momentum são fenômenos governados pelo mesmo processo de colisão molecular assim, uma das equações de estado mais utilizadas para este caso é (HIRSCHBERG; RIENSTRA, 2004):

$$c_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}. \quad (3.55)$$

Comumente para o caso de propagação de ondas, 3.55 é utilizada no seguinte formato

$$p' = c_0 \rho'. \quad (3.56)$$

Combinando-se a equação 3.54 com a relação dada pela equação 3.56, chega-se a forma geral da equação da onda com escoamento médio ao longo do tempo e do espaço

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{2\mathbf{u}_0}{c_0^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\nabla p') + \frac{\mathbf{u}_0}{c_0^2} (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \nabla p' - \nabla^2 p' = 0. \quad (3.57)$$

3.3 Solução da Equação de Onda

O caso considerado, consiste em uma geometria aproximada como cilíndrica de um turbofan onde considera-se também a presença do cubo do rotor, como mostrado na figura 11. Desta forma, o sistema de coordenadas que melhor representa tal configuração é são as coordenadas cilíndricas. O escoamento é definido como uniforme na direção x (axial). O conjunto rotor-estator é considerado como uma fonte pontual na direção, e a origem do sistema é definida na posição onde se encontra tal conjunto.

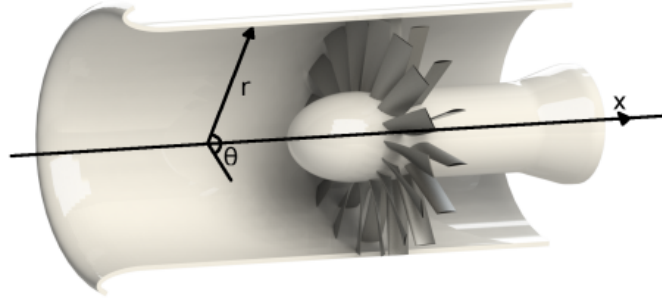


Figura 11 – Esquema de turbofan considerado para a solução da equação da onda (PIMENTA, 2016)

Definindo-se o $\mathbf{u}_0 = U\hat{\mathbf{i}}$ e reduzindo-se os três primeiros termos da equação 3.57, pode-se obter a a forma final da equação da onda a ser resolvida para o caso estudado.

$$\frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p' - \nabla^2 p' = 0. \quad (3.58)$$

Definindo-se o operador ∇^2 em coordenadas cilíndricas tem-se que

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (3.59)$$

Logo, a equação da onda em coordenadas cilíndricas é dada por

$$\frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p' - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) p' = 0. \quad (3.60)$$

O número de Mach na direção axial é definido como

$$M_0 = \frac{U}{c_0}. \quad (3.61)$$

Logo, expandindo-se a equação 3.60 e substituindo a relação do número de Mach dada por 3.61, chega-se que

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{2M_0}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p'}{\partial x} + M_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}. \quad (3.62)$$

A equação 3.62 se trata de uma equação diferencial parcial com quatro variáveis e a sua solução será obtida pelo método da separação de variáveis. Logo, a solução terá o seguinte formato

$$p'(x, r, \theta, t) = X(x)R(r)\Theta(\theta)T(t). \quad (3.63)$$

desta forma, a equação assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} (XR\Theta)T'' + \frac{2M_0}{c_0} (R\Theta)X'T' + M_0^2 (R\Theta T)X'' = \\ (X\Theta T)R'' + \frac{1}{r} (X\Theta T)R' - \frac{1}{r^2} (XRT)\Theta'' + (RT\Theta)X'. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Agora, dividi-se a equação 3.64 por $XR\Theta T$ e rearranjando, chega-se que

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{T''}{T} + \frac{2M_0}{c_0} \frac{X'T'}{XT} + (M_0^2 - 1) \frac{X''}{X} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta}. \quad (3.65)$$

Para a obtenção da solução da separação de variáveis considera-se, primeiramente, o escoamento médio como zero, posteriormente serão avaliados os efeitos da introdução deste na solução encontrada. Assim como considera-se primeiramente $M_0 = 0$ a equação a ser solucionada possui o formato expresso por

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{T''}{T} - \frac{X''}{X} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta}. \quad (3.66)$$

Fazendo-se esta consideração chega-se a quatro equações diferenciais lineares. A solução de três destas é bem conhecida, e para a última apesar de complexa, a solução também pode ser obtida. Considerando

$$\frac{T''}{T} = -K_t^2, \quad (3.67)$$

$$\frac{X''}{X} = -K_x^2, \quad (3.68)$$

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -K_\theta^2, \quad (3.69)$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta}{\Theta} = -K_r^2, \quad (3.70)$$

para cada uma das equações o termo K^2 corresponde ao número de onda, sendo este também a constante de separação. Solucionando-se primeiramente equação que depende de θ ou seja a equação 3.69, trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes, i.e.

$$\Theta'' + K_\theta^2 \Theta = 0. \quad (3.71)$$

O problema da propagação de ondas em um duto de turbofan, trata-se de um problema de cíclico. Desta forma, apesar da existência de outras soluções como as de decaimento ou amplificação exponencial, a solução de interesse para o problema possui natureza oscilatória preconizando um sinal de onda viajando na direção da variável analisada. Os decaimentos ou amplificações surgem naturalmente das soluções oscilatórias que regem a propagação ao longo do duto. Tendo em vista tal fato, uma das possíveis soluções para equação 3.71 é $\Theta = e^{g\theta}$ assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} \Theta &= e^{g\theta} \therefore \\ \Theta'' &= g^2 e^{g\theta} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Substituindo as relações de 3.72 na equação 3.71, tem-se:

$$\begin{aligned} g^2 e^{g\theta} + K_\theta^2 e^{g\theta} &= 0 \therefore \\ e^{g\theta} (g^2 + K_\theta^2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Assim para a solução da equação 3.73, o termo entre parêntese é zero já que, o outro termo da multiplicação é uma exponencial, que intrinsecamente é sempre diferente de zero. Assim, obtêm-se

$$g^2 + K_\theta^2 = 0 \therefore g = \pm iK_\theta. \quad (3.74)$$

Pelo princípio da superposição, a combinação linear das soluções obtidas na equação é, também, solução para 3.69, ou seja

$$\Theta = Ae^{iK_\theta\theta} + Be^{-iK_\theta\theta}. \quad (3.75)$$

As constantes A e B podem ser encontradas com a partir das condições de contorno no problema. As condições de contorno e caracterização da fonte permite encontrar relações para o número de onda da coordenada θ e para coordenada t . A continuidade entre os ângulos $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$, já que fisicamente representam o mesmo ponto permite a obtenção de uma relação para número de onda da coordenada angular

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi). \quad (3.76)$$

Substituindo-se na solução encontrada na 3.75 tem-se que

$$Ae^{iK_\theta(2\pi)} + Be^{-iK_\theta(2\pi)} = Ae^{iK_\theta(2\pi)} + Be^{-iK_\theta(2\pi)}. \quad (3.77)$$

Assim, aplicando-se a fórmula de Euler chega-se que

$$\begin{aligned} A\cos(K_\theta 0) + B\cos(K_\theta 0) + A\sin(K_\theta 0) - B\sin(K_\theta 0) = \\ A\cos(K_\theta 2\pi) + B\cos(K_\theta 2\pi) + A\sin(K_\theta 2\pi) - B\sin(K_\theta 2\pi). \end{aligned} \quad (3.78)$$

A igualdade da equação 3.78 é satisfeita para todos os valores inteiros de K_θ , logo somente ondas de períodos inteiros são permitidas nas soluções tal fato constrói a primeira característica modal do ruído propagado no duto. Assim, define-se m como o modo circunferencial onde m é um número pertencente aos inteiros positivos ou negativos. Assim a solução geral para a equação 3.69 é dada por

$$\Theta(\theta) = \Theta_1 e^{im\theta} + \Theta_2 e^{-im\theta}. \quad (3.79)$$

Usando-se os mesmos princípios descritos para a solução da equação 3.69, pode-se obter, considerando-se as condições de contorno corretamente, a solução para as equações 3.67 e 3.68. A solução na variável temporal é dada por

$$T(t) = T_1 e^{i\omega t} + T_2 e^{-i\omega t} \quad (3.80)$$

Onde ω é frequência da oscilação temporal do ruído gerado pelas pás do rotor. Já para coordenada axial a solução será

$$X(x) = X_1 e^{iK_x x} + X_2 e^{-iK_x x} \quad (3.81)$$

A solução da equação 3.70 é menos trivial que as demais, primeiramente, observa-se que ela está diretamente relacionada com os modos circunferenciais logo, substituindo a equação 3.69 em 3.70, a equação para a coordenada radial assume o seguinte formato:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \left(K_r^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) = 0, \quad (3.82)$$

que é segundo (BUTKOV, 1988) a equação característica com os autovalores K_r que podem ser obtidos a partir das condições de contorno nas paredes do duto, (BUTKOV, 1988) faz uso da substituição $x = K_r r$ e $R(r) = y(\frac{x}{K_r})$ para suprimir os autovalores da equação. Assim chega-se à:

$$\frac{d^2 y}{d(\frac{x}{K_r})^2} + \frac{1}{(\frac{x}{K_r})} \frac{dy}{d(\frac{x}{K_r})} + \left(K_r^2 - \frac{m^2}{(\frac{x}{K_r})^2} \right) = 0 \quad (3.83)$$

. Obtendo-se então a equação de Bessel de ordem m

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0. \quad (3.84)$$

A equação 3.84 trata-se de uma equação diferencial de coeficientes variáveis que possui um ponto singular assim, a sua solução pode ser obtida a através do método de Frobenius, por se tratar de um desenvolvimento longo até se encontrar as relações de recorrência tal solução será explicitada no apêndice deste trabalho. A solução geral da equação 3.84 é dada por:

$$R(r) = R_1 J_m(K_r r) + R_2 N_m(K_r r) \quad (3.85)$$

Tal solução trata-se da combinação linear das funções de Bessel e Neumann de ordem m . A ordem m das funções que compõem a solução é o mesmo inteiro referente o modo circunferencial.

As condições de contorno à serem aplicadas à equação 3.85 são relacionadas às características das paredes do tubo na interação com onda acústica. O caso mais geral considerado trata-se de um duto com a presença do cubo do rotor que formando assim um tubo com seção anelar como representado na figura 12. Desta forma, considera-se a condição de contorno mais usual que é a condição de parede rígida tanto na nacele do duto como na parede do cubo do rotor, matematicamente tal condição preconiza que:

$$\frac{dp'}{dr} \Big|_{r=R_i} = \frac{dp'}{dr} \Big|_{r=R_0} = 0 \quad (3.86)$$

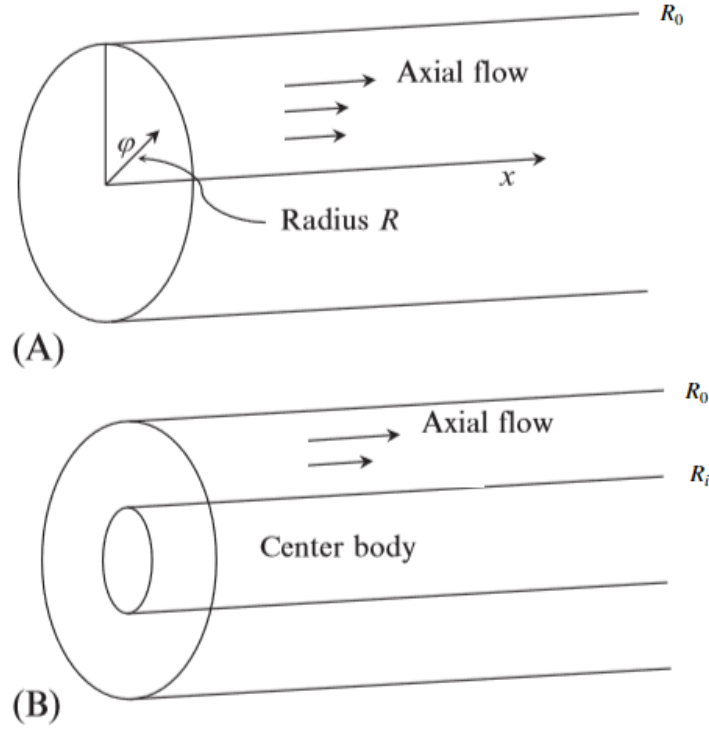


Figura 12 – Dutos sem e com o corpo central representando a ausência ou não do cubo do rotor (GLEGG; DEVENPORT, 2017)

Ou seja, a derivada da flutuação de pressão nas paredes é nula. A notação utilizada nas condições de contorno considera a posição da nacele e do cubo do rotor que são respectivamente R_0 e R_i

Para o caso de um duto desconsiderando-se a presença do cubo do rotor, apenas a parte da solução referente à $J_m(K_r r)$ é admissível já que a função de Neumann, $N_m(K_r r)$, não é finita em $r = 0$ logo para a solução deste caso faz-se $R_2 = 0$.

Definindo-se então σ_{mn}

$$\sigma_{mn} = K_r R_0 \quad (3.87)$$

Desta forma, σ_{mn} é a relação entre o autovalor K_r e a posição relativa onde as condições de contorno são aplicadas. Define-se, também, a razão entre o raio mais interno e o mais externo da geometria considerada:

$$\sigma = \frac{R_i}{R_0} \quad (3.88)$$

Onde $\sigma = 1$ na nacele do duto.

Substituindo a solução da equação 3.85 e as relações das equações 3.87 e 3.88 nas condições de contorno explicitadas em 3.86, chega-se

$$\begin{cases} R_1 J'_m(\sigma_{mn} \sigma) + R_2 N'_m(\sigma_{mn} \sigma) = 0 \\ R_1 J'_m(\sigma_{mn}) + R_2 N'_m(\sigma_{mn}) = 0 \end{cases} \quad (3.89)$$

Isolando-se R_1 na primeira equação do sistema linear e substituindo-se na segunda, chega-se que

$$\frac{N'_m(\sigma_{mn}\sigma)}{J'_m(\sigma_{mn}\sigma)} - \frac{N'_m(\sigma_{mn})}{J'_m\sigma_{mn}} = 0. \quad (3.90)$$

Note que as raízes da equação 3.90 não podem ser obtidas analiticamente. Assim, os valores de σ_{mn} que satisfazem a relação devem ser obtidos numericamente. Devido ao comportamento oscilatório das funções de Bessel (J_m) e Neumann (N_m), para cada modo circunferencial m existirá mais de uma raiz. Então, define-se os modos radiais n que serão as raízes da equação 3.85 obtidas numericamente. Utilizando-se o sistema linear da equação 3.89 para relacionar R_1 e R_2 chega-se à seguinte forma da equação 3.85

$$R(r) = R_1[(J_m(K_r r) - \frac{J'_m(K_r R_0)}{N'_m(K_r R_0)} N_m(K_r r))] \quad (3.91)$$

$m \backslash n$	$R_i/R_o = 0.0$				$R_i/R_o = 0.5$			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	1.84118	5.331440	8.536320	11.70600	1.354670	6.564940	12.70642	18.94266
2	3.05424	6.706130	9.969470	13.17037	2.681200	7.062580	12.94941	19.10316
3	4.20119	8.015240	11.34592	14.58585	3.957750	7.840110	13.34760	19.36843
4	5.317550	9.282400	12.68191	15.96411	5.175230	8.836440	13.89228	19.73536
5	6.415620	10.51986	13.98719	17.31284	6.338890	9.985860	14.57363	20.20002
6	7.501270	11.73494	15.26818	18.63744	7.462160	11.22699	15.38192	20.75803
7	8.577840	12.93239	16.52937	19.94185	8.558630	12.50947	16.30771	21.40492
8	9.647420	14.11552	17.77401	21.22906	9.638210	13.79645	17.34065	22.13653
9	10.71143	15.28674	19.00459	22.50140	10.70710	15.06463	18.46709	22.94926
10	11.77088	16.44785	20.22303	23.76072	11.76886	16.30316	19.66825	23.84022
11	12.82649	17.60027	21.43085	25.00852	12.82556	17.51086	20.92081	24.80708
12	13.87884	18.74509	22.62930	26.24605	13.87842	18.69206	22.20008	25.84735
13	14.92837	19.88322	23.81939	27.47434	14.92818	19.85273	23.48394	26.95706
14	15.97544	21.01540	25.00197	28.69427	15.97535	20.99829	24.75601	28.12910

Figura 13 – Valores de σ_{mn} para um duto circular e anular (PIMENTA, 2016)

Assim, substituindo-se todas as soluções encontradas na equação 3.63 tem-se que:

$$p'(x, r, \theta, t) = (X_1 e^{iK_x x} + X_2 e^{-iK_x x})(\Theta_1 e^{im\theta} + \Theta_2 e^{-im\theta})(T_1 e^{i\omega t} + T_2 e^{-i\omega t}) \left(R_1 \left[J_m(K_r r) - \frac{J'_m(K_r R_0)}{N'_m(K_r R_0)} N_m(K_r r) \right] \right) \quad (3.92)$$

Ou ainda,

$$p'(x, r, \theta, t) = X \Theta T e^{i(-\omega t + K_x x + m\theta)} R_1 \left[J_m(K_r r) - \frac{J'_m(K_r R_0)}{N'_m(K_r R_0)} N_m(K_r r) \right] \quad (3.93)$$

Ainda deve-se encontrar uma relação para o número de onda K_x . Para o caso sem escoamento, pode-se relacionar o número de onda K_x com os números de onda K_t e K_r através

da relação dada por 3.66 já que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_0^2} \frac{T''}{t} &= \frac{-K_x^2}{c_0^2} = -\frac{\omega}{c_0^2} \\ \frac{X''}{X} &= -K_x^2 \\ \frac{R''}{R} \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} &= -K_r^2\end{aligned}\quad (3.94)$$

Logo, substituindo as relações de 3.94 na equação 3.66, tem-se que:

$$-K_t^2 + K_x^2 = -K_r^2 \therefore K_x^2 = -K_r^2 + K_t^2 \quad (3.95)$$

A relação para o número de onda da direção axial possui a seguinte relação que o define:

$$K_x = \sqrt{K_t^2 - K_r^2} \quad (3.96)$$

Considerando-se agora a presença de um escoamento uniforme na direção axial, e utilizando o mesmo princípio de substituição dos resultados obtidos na separação de variáveis, avalia-se os termos restantes da equação 3.65, que são

$$\underbrace{\frac{2M_0}{c_0} \frac{X'T''}{XT}}_1 + \underbrace{(M_0^2 - 1) \frac{X''}{X}}_2 \quad (3.97)$$

Expandindo-se o termo 2, tem-se que

$$(M_0 - 1) \frac{X''}{X} = (M_0^2 - 1)(-K_x^2) = (1 - M_0^2)K_x^2. \quad (3.98)$$

A partir os termos dependentes da varável x, do termo 1 da equação 3.97 tem-se que:

$$\begin{aligned}X &= X_1 e^{iK_x x} + X_2 e^{-iK_x x} \\ X' &= iK_x (X_1 e^{iK_x x} + X_2 e^{-iK_x x}) \\ \therefore \frac{X'}{X} &= iK_x\end{aligned}\quad (3.99)$$

Avaliando-se os termos dependentes de t do termo 1 da equação 3.97

$$\begin{aligned}T &= T_1 e^{i\omega t} + T_2 e^{-i\omega t} \\ T' &= -i\omega (T_1 e^{i\omega t} + T_2 e^{-i\omega t}) \\ \therefore \frac{T'}{T} &= -i\omega\end{aligned}\quad (3.100)$$

Logo, a equação 3.97 pode ser escrita como

$$\frac{2M_0}{c_0} (-i\omega iK_x) = \frac{2M_0}{c_0} \omega K_x \quad (3.101)$$

Combinando-se as soluções de cada uma das coordenadas separadas utilizando-se a equação 3.65, tem-se a seguinte relação para o número de onda K_x para o caso com a presença de um escoamento uniforme,

$$-\frac{\omega^2}{c_0^2} + \frac{2M_0}{\omega} K_x + (1 - M_0^2) K_x^2 = -K_r^2, \quad (3.102)$$

que pode ser reescrita ainda na seguinte forma:

$$K_r^2 + K_x^2 = \frac{\omega}{c_0^2} - \frac{2M_0}{c_0}\omega K_x + M_0^2 K_x^2, \quad (3.103)$$

Note que o lado direito é um produto notável do tipo $(a - b)^2$, ou seja

$$K_r^2 + K_x^2 = \left(\frac{\omega}{c_0} - M_0 K_x\right)^2 \quad (3.104)$$

podendo-se reescrever tal relação como

$$\pm K_x = \frac{\omega/c_0}{1 - M_0^2} \left[-M_0 \pm \sqrt{1 - (1 - M_0^2) \left(\frac{K_r c_0}{\omega}\right)^2} \right]. \quad (3.105)$$

O sinal do número de onda K_x , indica a direção positiva ou negativa da onda na direção axial.

Assim, chega-se a seguinte solução advinda do produto das soluções de cada uma das coordenadas consideradas:

$$p'(x, r, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{m,n} \left[J_m \left(\sigma_{mn} \frac{r}{R_0} \right) - \frac{J'_m(\sigma_{mn})}{N'_m(\sigma_{mn})} N_m \left(\sigma_{mn} \frac{r}{R_0} \right) \right] e^{-i(\omega t + K_x x + m\theta)} \quad (3.106)$$

Onde $P_{m,n}$ é o produto de todas as amplitudes das soluções de cada uma das coordenadas avaliadas, relacionada ao modo circunferencial e radial.

3.4 Ruído da interação rotor-estator

Além do rotor e do estator gerarem ruídos independentemente, uma grande interação entre ambas as partes ocorre contribuindo para a geração de ruído, sendo a interação rotor estator umas das maiores fontes de ruído em turbofans.

O principal resultado da interação rotor-estator é a produção de modos radiais e circunferenciais conhecidos também como modos de Tayler e Sofrin que compõe o ruído tonal. Os modos de Tayler e Sofrin estão diretamente relacionados com a frequência da passagem das pás do rotor e seus harmônicos, a interação entre o rotor e o estator irá gerar um conjunto de modos que dado certas circunstâncias estes irão propagar na direção axial positiva e negativa.

Modelando-se o campo de pressões gerado apenas por um rotor e utilizando-se a solução para equação da onda desenvolvida na seção anterior chega-se à equação 3.106.

Analisando-se os modos gerados, considera-se apenas as partes temporal, radial e angular da solução particular, onde a frequência ω e o modo circunferencial m são obtidos a partir da interação rotor-estator e da frequência da passagem de pás do rotor:

$$p'(x, r, \theta, t) = P'(x, r) P_{m,n} e^{i(-\omega t + m\theta)} \quad (3.107)$$

O termo $P'(x, r)$ é composto pelas funções oscilatórias na direção radial e axial. Considerando-se a passagem de várias pás por um determinado ponto, próximo à esse ponto as pás irão produzir uma perturbação no campo de pressão que dada certas condições será mantida constante caso o ponto se mova juntamente com as pás do rotor. Pela equação da onda o valor da amplitude das flutuações de pressão não é calculada já que, depende de vários fatores complexos como a geometria das pás e a caracterização do escoamento entorno destas. Levando-se em consideração estes fatos, o termo do tempo deve ser caracterizado para um ponto fixo no espaço (PIMENTA, 2016), i.e.

$$\omega = hB\Omega, \quad (3.108)$$

onde h representa os harmônicos da frequência de passagem das pás, B é o número de pás do rotor e $\Omega = 2\pi f$ onde f é a rotação em RPS do rotor. Considerando que a solução temporal para o campo de pressões é dada pela soma de todos os harmônicos da frequência de giro do rotor, tem-se que

$$p'(x, r, \theta, t) = \sum_{h=1}^{\infty} P'(x, r) P_{m,n,h} e^{i(-hB\Omega t + m\theta + \Phi_{m,h})}, \quad (3.109)$$

onde $\Phi_{m,h}$ é a fase relacionada com a posição do rotor e seu harmônico respectivo.

Em geral a equação da onda tem solução para qualquer valor de m . Considera-se agora, que no tempo t a posição relativa do rotor ao estator seja θ , e que em tal situação uma flutuação de pressão devido a interação do rotor com estator equivalente à 3.109 seja produzida. Considerando-se, também, que a distância entre duas lâminas do estator seja dada por

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{V}, \quad (3.110)$$

onde V é o número de pás do estator. O tempo necessário para que o estado de pressão gerado inicialmente se repita (quando a próxima pá do rotor ocupar a posição da anterior) é dado por

$$\Delta T = \frac{2\pi}{V\Omega}. \quad (3.111)$$

Assim o campo de pressão será o mesmo no tempo t na posição θ e no tempo será o mesmo que no tempo $t + \Delta T$ na posição $\theta + \Delta\theta$, logo:

$$\sum_{h=1}^{\infty} P'(x, r) P_{m,n,h} e^{i(-hB\Omega t + m\theta + \Phi_{m,h})} = \sum_{h=1}^{\infty} P'(x, r) P_{m,n,h} e^{i(-hB\Omega(t+\Delta t) + m(\theta+\Delta\theta) + \Phi_{m,h})} \quad (3.112)$$

Rearranjando:

$$\sum_{h=1}^{\infty} P'(x, r) P_{m,n,h} e^{i(-hB\Omega t + m\theta + \Phi_{m,h})} = \sum_{h=1}^{\infty} P'(x, r) P_{m,n,h} e^{i(-hB\Omega t + m\theta + \Phi_{m,h})} e^{i(-hB\Omega\Delta t + m\Delta\theta)} \quad (3.113)$$

logo,

$$e^{i(-hB\Omega\Delta t + m\Delta\theta)} = 1 \quad (3.114)$$

As soluções possíveis para 3.114 são:

$$e^{i2\pi k} = 1 \quad (3.115)$$

onde k é qualquer valor inteiro. Substituindo-se as definições das equações 3.110 e 3.111 tem-se que:

$$\begin{aligned} i(-hB\Omega\Delta t + m\Delta\theta) &= i2\pi k \\ \therefore i(-hB\Omega\frac{2\pi}{V\Omega} + \frac{m2\pi}{V}) &= i2\pi k \end{aligned} \quad (3.116)$$

Logo tem-se que o modo circunferencial m pode ser dado por:

$$m = hB + kV \quad (3.117)$$

Os modos m obtidos a partir da equação 3.117 são os valores possíveis relacionados às condições cíclicas de Δt e $\Delta\theta$. Estes modos são conhecidos como modos de interação rotor-estator de Tayler e Sofrin, sendo estes os modos obtidos pela interação das pás do rotor com as pás do estator, associados à sua frequência fundamental e seus harmônicos. A relação para os modos de Tayler e Sofrin possui casos especiais como quando não há presença das pás do estator fazendo com que os modos sejam somente múltiplo do número de pás com somente um modo por harmônico. Ou ainda o caso onde não há pás do rotor, que apesar de matematicamente possível é fisicamente inconsistente já que não há movimento do estator logo não há frequência associada à somente as pás do estator.

Substituindo a relação 3.117 na solução da equação de onda obtida na seção anterior 3.106 chega-se à

$$\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{m,n} \left[J_m\left(\frac{\sigma_{mn}r}{R_0}\right) - \frac{J'_m(\sigma_{mn})}{N'_m(\sigma_{mn})} N_m(\sigma_{mn}\frac{r}{R_0}) \right] e^{i(-hB\Omega t + K_x x + \theta(hB + kV))}, \quad (3.118)$$

que representa a solução geral para o ruído tonal gerado pela interação do rotor com o estator onde as ondas acústicas se propagam tanto na direção positiva quanto na direção negativa axialmente. A seleção de quais dos modos circunferenciais gerados irão se propagar é dada pela regra de Tyler e Sofrin. A parte real da equação 3.118 será considerada como a solução física do problema. A amplitude dos modos circunferenciais devem ser obtidas experimentalmente ou numericamente já que dependem das propriedades aerodinâmicas do rotor e do estator.

3.5 Propagação do ruído tonal em dutos

Utilizando-se da solução para equação de onda considerando-se os efeitos convectivos introduzidos pela presença do escoamento aliada à regra de seleção dos modos circunferenciais de Tayler e Sofrin, é possível caracterizar a propagação da onda acústica

ao longo do duto. Utilizando-se a teoria de propagação, o conjunto de modos que realmente compõe o ruído tonal é reduzida já que apenas os modos gerados e propagados irão irradiar para fora do duto. O turbofan pode ser modelado como um duto circular uniforme com um escoamento axial constante e uma condição de parede rígida, tendo duas partes diferentes uma onde não há a presença do cubo do rotor e a outra onde há. Assim, pode-se avaliar duas configurações diferentes de dutos, uma de um duto simples e a outra de um duto anelar formado pelas paredes da nacele e do cubo do rotor. A equação 3.105 é a relação que dará o comportamento modal dado as condições de escoamento consideradas.

Analisando-se a equação 3.118, caso todos os argumentos das variáveis espaciais e temporais e dos termos exponenciais sejam reais, os modos de uma determinada solução particular irão se propagar sem alterações nas suas amplitudes. Isto é válido para os números de onda dos termos temporal, circunferencial e radial, considerando que os auto valores das funções de Bessel e Neumann são valores reais. Já o número de onda que está associado à direção axial e seu respectivo termo exponencial pode ser um número complexo.

Da equação 3.105, vale ressaltar que a variação do sinal do número de onda K_x implica no sentido da propagação da onda na direção axial. K_x . A raiz quadrada da equação para o número de onda axial pode assumir tanto valores reais quanto imaginários. Os valores reais indicam uma solução puramente oscilatória porém, quando complexos esses valores indicam um efeito de decaimento ou amplificação com oscilação na propagação da onda.

Para se manter a coerência termodinâmica, observa-se que apenas argumentos complexos relacionados com o decaimento da onda são permissíveis. Assim, isolando-se o termo da raiz quadrada da equação 3.105, têm-se as seguintes condições para a propagação modal

$$(1 - M_0^2) \left(\frac{K_r c_0}{h B \Omega} \right)^2 = \begin{cases} < 1 \text{ cut-on,} \\ = 1 \text{ valor crítico,} \\ > 1 \text{ cut-off} \end{cases} \quad (3.119)$$

Observa-se que quando o termo da equação 3.119 é menor que um, a raiz quadrada da expressão 3.105 será um número real, assim não haverá atenuação na propagação da onda da equação 3.118, assim define-se o modo como cut-on. Para valores iguais à um, o modo será considerado um modo crítico mas ainda sim do tipo cut-on. Já para valores maiores que a unidade, a raiz quadrada terá um valor imaginário assim, um termo de decaimento exponencial surgirá na equação 3.118, os modos que abarcam esse caso serão cut-off.

De acordo com a equação 3.105, os fatores que influenciam na propagação dos modos são a velocidade do som, o número de Mach do escoamento axial, o número de pás do rotor, a frequência de rotação do eixo do rotor e raio do duto. Ou seja, fatores termodinâmicos, operacionais e de projeto do motor. O modo circunferencial m deve ser obtido numericamente para um dado modo radial n e então comparado com valor crítico.

Substituindo-se a relação dada pela equação 3.87 na condição crítica da equação 3.119 pode-se isolar o valor crítico do modo circunferencial.

$$\sigma_{mn,c} = \frac{R_0 \Omega h B}{c_0 (1 - M_0^2)^{1/2}} \quad (3.120)$$

Ao realizar uma análise cinemática é possível obter um melhor entendimento do cut-on ou cut-off dos modos gerados devido a interação do rotor com o estator. Assim, analisando-se os argumentos da exponencial da equação 3.118 tal que definem a fase

$$-hB\Omega t + K_x x + \theta(hB + kV) = \phi \quad (3.121)$$

Analisando-se a velocidade de fase na direção θ , fixa-se um ponto no espaço (logo, $x = \text{cte}$) e tira-se a derivada temporal da equação 3.121. Escolhe-se $\phi = 0$, que implica na máxima amplitude já que $Re(e^\phi) = \cos(\phi) = 1$, assim tem-se que:

$$(hB + kV) \frac{d\theta}{dt} + \frac{d(K_x x)}{dt} + hB\Omega = 0 \quad (3.122)$$

Como, a análise é feita para um ponto fixo no espaço, chega-se à:

$$(hB + kV) \frac{d\theta}{dt} = hB\Omega \quad (3.123)$$

Multiplicando-se ambos os lados da expressão acima pelo raio do tubo, define-se a velocidade de fase como:

$$R_0 \frac{d\theta}{dt} = U_m = \frac{hB\Omega R_0}{hB + kV} \quad (3.124)$$

definindo-se a velocidade circunferencial da ponta da pás do rotor como:

$$U_{R_0} = \Omega R_0 \quad (3.125)$$

assim, tem-se que:

$$\frac{U_m}{U_{R_0}} = \frac{hB}{hB + kV} \quad (3.126)$$

A equação 3.126 representa a razão entre a velocidade circunferencial do modo m e a velocidade circunferencial das pontas das pás do rotor. Uma das consequências dessa expressão é que modos de interação que possuem menor valor dos que modos gerados apenas pelo rotor, possuem uma velocidade de fase circunferencial mais alta que pode ser maior do que a própria velocidade do som (PIMENTA, 2016).

Combinando-se a equação 3.126 com a equação 3.119 para o caso crítico, tem-se

$$U_{m,c} = (1 - M_0^2)^{1/2} \frac{\sigma_{mn}}{m} c_0, \quad (3.127)$$

que preconiza a velocidade circunferencial de fase mínima que o modo m deve ter para que este se propague. Simplificando-se a equação 3.127 para o caso sem escoamento $M_0 = 0$, observando-se que a razão σ_{mn}/m se aproxima de 1 para valores altos de m pode-se aproximar a velocidade circunferencial crítica de fase por

$$U_{m,c} = c_0, \quad (3.128)$$

ou seja, para um modo circunferencial se propagar, a velocidade de fase deste deve ser pelo menos sônica. Tal fato implica ainda que para os modos gerados somente pelo rotor a ponta da pá do rotor deve se movimentar à pelo menos a velocidade sônica. Para o caso do rotor estator, como podemos avaliar pela equação 3.126 as pás do rotor não necessitam de velocidade de fase sônica para que gerem modos propagantes já que, alguns dos modos gerados podem ter velocidade de fase sônica para que mantenham a sua respectiva frequência harmônica.

Analisando-se agora a velocidade de fase para o modo axial K_x , faz-se o mesmo processo, porém agora avalia-se um ponto $\theta = \text{cte}$, logo a equação 3.122 assume a seguinte forma

$$K_x \frac{dx}{dt} = hB\Omega. \quad (3.129)$$

através da relação da equação 3.108, pode-se escrever a equação 3.129 como:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{K_x} \quad (3.130)$$

da equação 3.105 sabe-se que o número de onda axial K_x pode ser positivo ou negativo, indicando a direção de propagação. Assim, substituindo-se a relação 3.105 na equação 3.130 tem-se que:

$$U_x = \frac{c_0(1 - M_0^2)}{-M_0 \pm \sqrt{1 - (1 - M_0^2)(\frac{K_x c_0}{\omega})^2}}. \quad (3.131)$$

Para 3.131 para o caso de uma onda plana, ou seja, $m = n = 0$, tem-se que:

$$U_{x,00}^{\pm} = \frac{c_0(1 - M_0^2)}{-M_0 \pm 1} \quad (3.132)$$

ou seja observa-se que as velocidades de propagação na direção axial positiva e negativa são diferentes. Reescrevendo-a para ambos os casos, utilizando-se o produto notável $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} U_{x,00}^+ &= \frac{c_0(1 - M_0)(1 + M_0)}{1 - M_0} = c_0(1 + M_0) = c_0 + U, \\ U_{x,00}^- &= \frac{c_0(1 - M_0)(1 + M_0)}{1 + M_0} = c_0(1 - M_0) = c_0 - U. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Assim, observa-se que a onda que se propaga na direção axial positiva, ou seja na mesma direção do escoamento, se propaga com a soma da velocidade som com velocidade do escoamento. Já para as ondas que se propagam na direção axial negativa, a velocidade de propagação é a diferença entre os valores da velocidade do som e do escoamento.

4 Condição de Contorno geral para uma Parede Flexível

Esta seção tem a intenção de derivar uma condição de contorno apropriada para as perturbações do escoamento base na superfície de uma parede flexível considerando-se um problema no qual a vibração do corpo gera um campo acústico dado um pequeno movimento em relação à sua superfície média ou o inverso, onde um dado campo acústico gera a movimentação da parede flexível. (MYERS, 1980)

Durante anos houve-se a discussão a cerca da condição de contorno geral para um campo acústico na presença de um escoamento base. Especialmente na área de acústica em dutos, tratou-se das aparentes diferenças apresentadas nas condições de contorno dada as considerações de meio invíscido ou viscoso. Como resultado de tal cenário, gradualmente foi-se aceito de que em um escoamento tratado como invíscido a condição cinemática apropriada em um contorno impenetrável do campo acústico é fisicamente expressa pela continuidade do deslocamento da partícula acústica (MYERS, 1980). Ou seja, em uma superfície cujas as deformações geram um campo acústico ou um campo acústico gera deformações sobre esta, o deslocamento da partícula fluida na direção normal da superfície não deformada deve ser igual ao deslocamento normal desta superfície.

4.1 Derivação da Condição de Contorno

Considerando-se uma superfície $S(t)$ que se move em relação a um referencial, essa superfície é assumida em contato com um fluido cuja velocidade $\mathbf{u}(x, t)$. Logo a partir da teoria do contínuo, uma das condições que devem ser satisfeitas em cada ponto da superfície, assumindo-se impenetrabilidade, é dada por

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad (4.1)$$

onde \mathbf{V} é a velocidade da superfície $S(t)$ em relação ao referencial, e $\boldsymbol{\nu}$ é o vetor unitário normal à superfície $S(t)$.

Dado que a superfície S pode ser definida espacialmente por

$$f(x, t) = 0 \quad (4.2)$$

logo, o vetor normal $\boldsymbol{\nu}$ pode ser expresso como

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\nabla f(x, t)}{|\nabla(f)|} \text{ para } f = 0 \quad (4.3)$$

O vetor normal $\boldsymbol{\nu}$ possui valor positivos apontando para fora da superfície, ou seja, apontando para fluido, e negativos para dentro da superfície. Como um ponto \mathbf{x} pertence sempre a superfície S para qualquer instante de tempo, pode-se derivar a equação 4.2 em relação ao tempo obtendo-se que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} = \mathbf{V} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t} = \mathbf{V} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (4.4)$$

substituindo a equação 4.3 na equação 4.4 tem-se que

$$\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nu} |\nabla f| + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \therefore \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\frac{1}{|\nabla f|} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.5)$$

substituindo-se a equação 4.5 na equação 4.1 e usando-se a relação dada em 4.3, pode-se reescrever a condição de impenetrabilidade como

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{u} |\nabla f| + \frac{\partial f}{\partial t} = \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0 \therefore \mathbf{u} \cdot \nabla f = -\frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.6)$$

Assume-se que a superfície S ou gera um campo acústico no fluido por vibração ou é deformado acusticamente em resposta a um campo acústico advindo do fluido. Assim, é conveniente escolher um sistema de coordenadas para \mathbf{V} e \mathbf{u} no qual o movimento de S seja uma perturbação sobre uma superfície estacionária S_0 e a perturbação correspondente da velocidade seja uma pequena perturbação da velocidade do escoamento em regime permanente $\mathbf{U}(x)$. Assim, o uso de um sistema coordenado ortogonal curvilíneo mostra-se uma alternativa mais geral para a descrição de tal situação. Assim, define-se um sistema fixo S_0 composto pelas coordenadas

$$\alpha(\mathbf{x}), \beta(\mathbf{x}), \gamma(\mathbf{x}) \quad (4.7)$$

de forma que $\alpha(\mathbf{x}) = 0$ em S_0 e

$$\nabla \alpha \cdot \nabla \gamma = \nabla \alpha \cdot \nabla \beta = \nabla \beta \cdot \nabla \gamma = 0 \quad (4.8)$$

ou seja, α trata-se da coordenada normal e as demais são as coordenadas tangenciais ao sistema definido. Assim, $S(t)$ pode ser descrita, conforme proposto por (MYERS, 1980), como

$$\alpha = \epsilon g(\beta, \gamma, t) + O(\epsilon^2), \quad (4.9)$$

e a velocidade como

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}(x, t) + O(\epsilon^2), \quad (4.10)$$

onde ϵ é um parâmetro adimensional que caracteriza a magnitude das perturbações acústicas.

Desta forma em termos das coordenadas curvilíneas, tem-se que 4.2 assume o seguinte formato

$$\alpha - \epsilon g(\beta, \gamma, t) + O(\epsilon^2) = f(x, t) = 0 \quad (4.11)$$

logo, a equação 4.6 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t} &= (\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u} + O(\epsilon^2)) \cdot \nabla(\alpha - \epsilon g + O(\epsilon^2)) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial t}(\alpha - \epsilon g + O(\epsilon^2)) \text{ para } \alpha = \epsilon g + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (4.12)$$

A equação 4.6 é satisfeita para um escoamento permanente sem perturbações acústicas, tal caso pode ser expresso pela equação 4.12 fazendo-se $\epsilon = 0$ o que leva à

$$\mathbf{U} \cdot \nabla \alpha = 0, \quad (4.13)$$

logo o escoamento \mathbf{U} deve ser tangente à superfície estacionária e não deformada S_0 .

4.1.1 Linearização da Condição de Contorno

Considerando-se agora o caso em que $\epsilon \ll 1$ será avaliado que forma será assumida para a equação 4.6.

Se \mathbf{U} e \mathbf{u} são funções de α, β, γ e que em $\alpha = 0$ podem ser consideradas suficientemente suaves é possível expandir a equação 4.12 em potências de ϵ . Primeiramente reescrevendo-se a equação 4.12

$$\begin{aligned} &\underbrace{\mathbf{U} \cdot \nabla \alpha}_1 + \underbrace{\mathbf{U} \cdot \nabla(-\epsilon g)}_2 + \underbrace{\epsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha}_3 + \underbrace{\epsilon \mathbf{u} \cdot \nabla(-\epsilon g)}_4 + \\ &\quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial(-\epsilon g)}{\partial t} + O(\epsilon^2) = 0 \text{ para } \alpha = \epsilon g + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.14)$$

como ϵ é constante o termo quatro da equação 4.14 será um termo de segunda ordem em ϵ que será aglutinado aos demais termos de segunda ordem representado por $O(\epsilon^2)$. A derivada temporal de α é igual a zero conforme visto anteriormente.

Realizando-se a expansão do termo 1 tem-se que

$$\mathbf{U} \cdot \nabla \alpha|_{\alpha=\epsilon g+O(\epsilon^2)} = \mathbf{U} \cdot \nabla \alpha|_{\alpha=0} + \alpha \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{U} \cdot \nabla \alpha) \right) |_{\alpha=0} + O(\epsilon^2) \quad (4.15)$$

substituindo a a equação 4.9 na equação 4.15 e aglutinado-se os termos de segunda ordem em $O(\epsilon^2)$ chega-se que

$$\mathbf{U} \cdot \nabla \alpha|_{\alpha=\epsilon g+O(\epsilon^2)} = \mathbf{U} \cdot \nabla \alpha|_{\alpha=0} + \epsilon g \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{U} \cdot \nabla \alpha) \right) |_{\alpha=0} + O(\epsilon^2). \quad (4.16)$$

Fazendo-se o mesmo processo para o termo 3 da equação 4.14 tem-se primeiramente que

$$\epsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha|_{\alpha=\epsilon g+O(\epsilon^2)} = \epsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha|_{\alpha=0} + \epsilon g \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} (\epsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha) \right) |_{\alpha=0} + O(\epsilon^2) \quad (4.17)$$

o segundo termo do lado direito da equação 4.17 é de segunda ordem em ϵ assim chega-se que:

$$\epsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha|_{\alpha=\epsilon g+O(\epsilon^2)} = \epsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha|_{\alpha=0} + O(\epsilon^2). \quad (4.18)$$

Assim, utilizando-se a equação 4.13 a condição dada pela equação 4.12 pode ser reescrita como

$$\epsilon \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{U} \cdot \nabla \alpha) \cdot g + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha - \mathbf{U} \cdot \nabla g - \frac{\partial g}{\partial t} \right] |_{\alpha=0} + O(\epsilon^2) = 0 \quad (4.19)$$

considerando-se $\epsilon \ll 1$ a linearização será feita desprezando-se os termos de segunda ordem em ϵ , assim

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{U} \cdot \nabla \alpha) \cdot g + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha - \mathbf{U} \cdot \nabla g - \frac{\partial g}{\partial t} \right) = 0 \text{ para } \alpha = 0. \quad (4.20)$$

Logo,

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \alpha = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) g - g \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{U} \cdot \nabla \alpha) \text{ para } \alpha = 0. \quad (4.21)$$

A equação 4.21 é a condição de contorno linearizada que governa uma perturbação acústica de velocidade \mathbf{u} em uma superfície impermeável. Como indicado, tal condição deve ser aplicada na posição média S_0 da superfície que se move como é o usual na acústica linearizada.

4.2 Manipulação e Análise da Condição de Contorno Linearizada

A derivação da condição de contorno representada pela equação 4.21 nas coordenadas ortogonais curvilíneas α, β, γ faz com que seja mais conveniente de se manipular de maneira mais fácil para formas de melhor interpretação e aplicação. Para tal, faz-se necessário a aplicação de algumas relações da teoria de coordenadas ortogonais curvilíneas que serão explicadas no apêndice deste trabalho.

Os vetores unitários da base do sistema coordenado α, β, γ serão denotados, respectivamente, como $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$. E os fatores de escala como: $h_\alpha, h_\beta, h_{h_\gamma}$. Utilizando-se da relação

$$\nabla \alpha = |\nabla \alpha| \hat{a} = \frac{1}{h_\alpha} \hat{a} \quad (4.22)$$

pode-se reescrever a equação 4.21 como

$$\mathbf{u} \cdot \hat{a} = h_\alpha \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla g \right) - g \left(\hat{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha} + \mathbf{U} \cdot \frac{\partial \hat{a}}{\partial \alpha} \right) \text{ para } \alpha = 0, \quad (4.23)$$

colocando-se o fator de escala h_α para dentro da derivada material tem-se

$$\mathbf{u} \cdot \hat{a} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) (gh_\alpha) - g \left[\hat{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha} + \mathbf{U} \cdot \left(\frac{\partial \hat{a}}{\partial \alpha} + \nabla h_\alpha \right) \right] \text{ para } \alpha = 0 \quad (4.24)$$

Agora introduzindo-se a seguinte relação

$$\frac{\partial \hat{a}}{\partial \alpha} = -\frac{1}{h_\beta} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \hat{b} - \frac{1}{h_\gamma} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \gamma} \hat{c} \quad (4.25)$$

e também

$$\nabla h_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \hat{a} + \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \hat{b} + \frac{1}{h_\gamma} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \gamma} \hat{c} \quad (4.26)$$

pode-se reescrever os dois últimos termos da equação 4.24 utilizando-se as relações 4.22, 4.25 e 4.26 como

$$g\mathbf{U} \cdot (1/h_\alpha)\hat{a} = -g(\partial h_\alpha/\partial \alpha)\mathbf{U} \cdot \nabla \alpha \quad (4.27)$$

assim, analisando-se os dois últimos termos da equação 4.24 na forma da equação 4.27 observa-se que levando-se em consideração a equação 4.13 em $\alpha = 0$ os termos são nulos. Assim, a equação 4.24 assume o seguinte formato

$$\mathbf{u} \cdot \hat{a} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla\right)(gh_\alpha) - g\hat{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha} \text{ para } \alpha = 0 \quad (4.28)$$

Pode-se observar que

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha} = h_\alpha \hat{a} \cdot \nabla \mathbf{U} \quad (4.29)$$

e que na superfície $\alpha = 0$ o vetor unitário \hat{a} é simplesmente o vetor normal à S_0 direcionado para o fluido. Este vetor pode ser denotado como \hat{n} , e assim a condição de contorno expressa na equação 4.28 pode ser reescrita como

$$\mathbf{u} \cdot \hat{n} = (\partial/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla)(g/|\nabla \alpha|) - (g/|\nabla \alpha|)\hat{n} \cdot (\hat{n} \cdot \nabla \mathbf{U}) \text{ em } S_0 \quad (4.30)$$

O resultado da equação 4.30 é uma condição de contorno especificada sem nenhuma referência específica ao sistema de coordenadas curvilíneas. A superfície média S_0 é dada por $\alpha(x) = 0$ e g pode ser considerada como uma função do tempo e do espaço. Essas funções, bem como o vetor normal \hat{n} , são conhecidas desde que S_0 e sua movimentação após a perturbação sejam especificadas. A condição dada na equação 4.30 também pode ser aplicada em qualquer lado de uma interface entre diferentes meios acústicos. Neste caso, o lado direito da equação 4.30 seria avaliado em cada lado da interface dada por $\alpha = 0$ e as duas expressões seriam igualadas para se garantir a continuidade da velocidade na direção normal ao longo da interface. Nesta circunstância, é também necessário uma condição que expresse a continuidade da pressão ao longo da interface. A utilização das duas condições em conjunto permitiria a eliminação da função desconhecida g do problema.

Pela forma da condição 4.30 é, também, mais simples de se derivar uma condição de contorno apropriada para um contorno acusticamente absoritivo no qual a impedância acústica na direção normal Z é conhecida para um movimento harmônico. Dentro deste contexto a derivação deste caso depende da determinação da função $g/|\nabla \alpha|$ que representa a deformação acústica do contorno. Considerando-se a expressão

$$\frac{\bar{p} - p_0}{\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nu}} \quad (4.31)$$

Onde \bar{p} é a pressão total no fluido, p_0 a pressão ambiente e $\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nu}$ a velocidade normal da superfície. Propondo-se o seguinte formato para o numerador da equação 4.31

$$\bar{p} - p_0 = \epsilon p + O(\epsilon^2) \quad (4.32)$$

e para o numerador utilizando-se a relação 4.5 e o formato proposto em 4.9 tem-se que

$$\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\frac{1}{|\nabla f|} \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{|\nabla(\alpha - \epsilon g)|} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha - \epsilon g)|_{\alpha=0} + O(\epsilon^2) \quad (4.33)$$

Assim, substituindo-se as equações 4.32 e 4.33 na equação 4.31 e expandido-se tem-se

$$-\frac{\epsilon p \nabla \alpha - \epsilon p \nabla(\epsilon g)}{\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial \epsilon g}{\partial t}}|_{\alpha=0} + O(\epsilon^2) \quad (4.34)$$

o segundo termo do numerador da equação 4.34 dará origem um termo da ordem de ϵ^2 e será aglutinado em $O(\epsilon^2)$, a derivada temporal de α é nula. Como $\epsilon \ll 1$ os termos de segunda ordem serão novamente desprezados. Logo, tem-se que a expressão 4.31 pode ser escrita como

$$\frac{\bar{p} - p_0}{\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nu}} = \frac{p|\nabla \alpha|}{\partial g / \partial t}|_{\alpha=0}. \quad (4.35)$$

A equação 4.31 é a definição de impedância acústica, sendo esta a razão entre a pressão e velocidade da partícula. Para uma dependência harmônica no tempo da pressão acústica de p e de g , assume-se que estas são grandezas proporcionais à exponencial complexa

$$p \sim e^{-i\omega t} \sim g \therefore \frac{\partial g}{\partial t} = -i\omega g e^{-i\omega t} \text{ e } p = p e^{-i\omega t} \quad (4.36)$$

assim tem-se que a equação 4.35 pode ser reescrita como

$$Z = \frac{p|\nabla \alpha|}{\partial g / \partial t}|_{\alpha=0} = \frac{|\nabla \alpha| p e^{-i\omega t}}{-i\omega g e^{-i\omega t}}|_{\alpha=0} \therefore Z = -\frac{1}{i\omega g} |\nabla \alpha| p|_{\alpha=0} \quad (4.37)$$

Desta forma, da expressão dada pela equação 4.37 chega-se que

$$g = -(1/i\omega Z)(|\nabla \alpha| p)|_{\alpha=0} \quad (4.38)$$

Logo a condição de contorno dada por 4.30 assume a forma de

$$\mathbf{u} \cdot \hat{n} = -(p/Z) - (1/i\omega) \mathbf{U} \cdot \nabla(p/Z) + (p/i\omega z) \hat{n} \cdot (\hat{n} \cdot \nabla \mathbf{U}) \text{ em } S_0 \quad (4.39)$$

Como a velocidade é a grandeza básica em descrição euleriana do movimento do fluido ressalta-se que a condição de contorno dada pela equação 4.39 representa a versão linearizada da continuidade da velocidade em S_0 . Tal condição é verdadeira para qualquer escoamento base seja ele viscoso e tenha que satisfazer a condição de não deslizamento ou invíscido e tenha que satisfazer a condição de impenetrabilidade.

Analisando-se agora a condição de contorno, observa-se que o primeiro termo da equação 4.30, dado a relação 4.5, é a primeira aproximação para velocidade normal, direção $\boldsymbol{\nu}$, de um ponto na superfície S . Os outro dois termos que envolvem a velocidade do escoamento base \mathbf{U} surgem do processo de linearização e expressão da condição de contorno em termos de \hat{n} e S_0 . Os termo que envolvem $\mathbf{U} \cdot \nabla g$ surgem pois o vetor normal instantâneo e o vetor normal S_0 em um ângulo de magnitude da ordem de ϵ . Assim, a velocidade do escoamento \mathbf{U} tem uma componente na direção do vetor normal instantâneo ($\boldsymbol{\nu}$) que é da

ordem de ϵ que se soma a velocidade acústica da partícula formando a perturbação total na direção normal à S

É de interesse agora considerar as implicações da condição de contorno em termos do deslocamento da partícula. Da relação $\alpha = \epsilon g$ que define a superfície S na aproximação linearizada, tem-se que a grandeza $\epsilon g/|\nabla\alpha|_{\alpha=0}$ é a principal aproximação para o deslocamento de um ponto em S_0 na direção normal à S_0 (\hat{n}). Esta grandeza pode ser denotada como ξ_b . É agora, conveniente a utilização da condição de contorno na forma 4.28 onde as grandezas \mathbf{U} , \mathbf{u} e g são funções do sistema curvilíneo α, β, γ , podendo-se assim escrever a relação da velocidade da partícula com o seu deslocamento com

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} \therefore \mathbf{u} \cdot \hat{a} = \hat{a} \cdot \frac{D \boldsymbol{\xi}}{Dt} \quad (4.40)$$

a partir da definição de ξ_b e da relação 4.22 tem-se

$$\xi_b = \frac{g}{|\nabla\alpha|_{\alpha=0}} \therefore g = |\nabla\alpha| \xi_b = \frac{1}{h_\alpha} \xi_b \quad (4.41)$$

utilizando-se a equação 4.41 pode-se reescrever a equação 4.28 como

$$\hat{a} \cdot \frac{D \boldsymbol{\xi}}{Dt} = \frac{D \xi_b}{Dt} - \left(\frac{\xi_b}{h_\alpha} \right) \hat{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha} \text{ para } \alpha = 0 \quad (4.42)$$

colocando-se vetor unitário \hat{a} para dentro da derivada material pode-se reescrever a equação 4.42 como

$$\frac{D(\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{a})}{Dt} - \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{U} \cdot \nabla \hat{a}) = \frac{D \xi_b}{Dt} - \frac{\xi_b}{h_\alpha} \hat{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \alpha} \text{ para } \alpha = 0 \quad (4.43)$$

Utilizando-se as derivadas para os vetores normais \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} e a relação 4.13 chega-se que

$$\frac{D(\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{a})}{Dt} - \boldsymbol{\xi} \cdot \left[\frac{\mathbf{U}_\beta}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\beta}{\partial \alpha} \hat{b} + \frac{\mathbf{U}_\gamma}{h_\alpha h_\gamma} \frac{\partial h_\gamma}{\partial \alpha} \hat{c} \right] = \frac{D \xi_b}{Dt} - \frac{\xi_b}{h_\alpha} \left[\frac{\partial \mathbf{U}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\mathbf{U}_\beta}{h_\beta} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\mathbf{U}_\gamma}{h_\gamma} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \gamma} \right] \quad (4.44)$$

onde \mathbf{U}_α , \mathbf{U}_β , \mathbf{U}_γ são as componentes de \mathbf{U} nas direções de α , β , γ das coordenada curvilíneas.

Considerando-se que o escoamento base seja invíscido, observa-se que o segundo termo de ambos os lados da equação 4.44 não é nulo, em geral. Logo, neste casos a equação 4.44 mostra que a condição de contorno dada por 4.39 não é equivalente ao deslocamento da partícula acústica na forma

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{n} = \xi_b \text{ em } S_0 \quad (4.45)$$

Por outro lado, para um fluido viscoso um escoamento que satisfaça a condição de não deslizamento. \mathbf{U}_α , \mathbf{U}_β , \mathbf{U}_γ são todos nulos em $\alpha = 0$. Utilizando-se a equação da continuidade em regime permanente

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (4.46)$$

logo

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (4.47)$$

As derivadas tangenciais de \mathbf{U} também são nulas em $\alpha = 0$ já que a velocidade no contorno é zero para qualquer ponto nele. Assim da equação da continuidade e das relações para coordenadas curvilíneas, explicadas no apêndice deste trabalho, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(h_\beta h_\gamma \mathbf{U}_\gamma) = \therefore \frac{\mathbf{U}_\alpha}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = 0 \quad (4.48)$$

Logo, chega-se que a equação 4.30 assume o seguinte formato

$$\mathbf{u} \cdot \hat{n} = (1/\nabla \alpha) \partial g / \partial t \text{ em } S_0 \quad (4.49)$$

Assim para um escoamento base viscoso recupera-se a continuidade do deslocamento de partícula em seu formato tradicional. Utilizando-se a relação 4.35 chega-se que

$$\mathbf{u} \cdot \hat{n} = -\frac{p}{Z} \text{ em } S_0 \quad (4.50)$$

Neste trabalho o escoamento considerado é invíscido desta forma, o formato apropriado da condição de contorno a ser utilizada será o caso expresso pela equação 4.39.

4.3 Solução da Equação de Onda para um Duto com Impedância Acústica finita na Parede

Em um duto cuja as paredes não possuem liners, os contornos são considerados rígidos. No capítulo três, desenvolveu-se a solução para a equação da onda em um caso de duto com paredes rígidas, isto é com uma impedância acústica infinita. A consideração da presença de liners nas paredes do duto, implica na existência de uma impedância finita nestes contornos, tal cenário impacta diretamente no formato da solução da componente radial derivada no capítulo 3.

A intenção deste capítulo é a derivação da parte radial considerando-se agora os efeito absorptivos do liner presente no contorno dado a impedância do mesmo e avaliando-se também os efeitos do escoamento invíscido e uniforme em tal cenário.

4.3.1 Condição de Contorno para um Liner Localmente Reativo em um Duto com Escoamento

Considerando-se um duto com liner, assume-se que o liner é localmente reativo no sentido de que a pressão em um ponto de sua superfície está relacionada somente com a velocidade normal do campo acústico neste ponto. Reintroduzindo-se a definição de impedância acústicas em termos da pressão p' e da velocidade normal $\mathbf{u} \cdot \hat{n}$ tem-se

$$Z(x, \omega) = \frac{p}{\mathbf{u} \cdot \hat{n}} = R + iX \quad (4.51)$$

onde a parte real R é denominada resistência e a parte imaginária X reatância.

Avaliando-se a condição de contorno derivada no capítulo 5, tem-se que

$$\mathbf{u} \cdot \hat{n} = -(p/Z) - (1/i\omega)\mathbf{U} \cdot \nabla(p/Z) + \underline{(p/i\omega z)\hat{n} \cdot (\hat{n} \cdot \nabla \mathbf{U})} \text{ em } S_0 \quad (4.52)$$

como \mathbf{U} se trata da velocidade de um escoamento uniforme na direção axial x o termo sublinhado é igual a zero e assim a condição de contorno dada em 4.52 assume o seguinte formato

$$\mathbf{u} \cdot \hat{n} = -\frac{p'}{Z} - \frac{1}{i\omega}U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{Z} \right). \quad (4.53)$$

Dado o formato para pressão p' descrito no capítulo 3 observa-se que esta pode ser reescrita como

$$p' = P \cdot Re^{-i(\omega t + K_x x + m\theta)} \quad (4.54)$$

assim a primeira derivada da equação 4.54 em relação à x é dada por

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -iK_x P \cdot Re^{-i(\omega t + K_x x + m\theta)} = -iK_x p' \quad (4.55)$$

logo, a condição de contorno para um duto com liners assume a forma

$$\mathbf{u} \cdot \hat{n} = -\frac{p'}{Z} + \frac{1}{i\omega Z}U iK_x p' \therefore \mathbf{u} \cdot \hat{n} = -i(\omega - K_x U) \frac{p'}{i\omega Z} \quad (4.56)$$

No fluido o comportamento do fluido é regido pela conservação do momento linear e dado que o escoamento é uniforme na direção axial, a componente na direção normal r , da equação da variação do momento linear pode ser escrita como

$$(i\omega + U \frac{\partial}{\partial x})u_n = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} \quad (4.57)$$

desta forma, substituindo-se a relação dada na equação 4.56 na equação 4.57, tem-se

$$(i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \left(-i(\omega - K_x U) \frac{p'}{i\omega Z} \right) = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} \right]_{R_i, R_0} \quad (4.58)$$

manipulando-se e utilizando-se a relação dada na equação 4.55 chega-se que

$$\left[\frac{\partial p'}{\partial r} \right]_{R_i, R_0} = \frac{1}{i\omega z c_0} (\omega - K_x U)^2 p' \quad (4.59)$$

a equação 4.59 representa a condição de contorno para o caso de um duto com paredes com impedância finita sobre a ação de um escoamento subsônico na direção axial, onde z é a impedância adimensional definida como

$$z = \frac{Z}{\rho c_0}. \quad (4.60)$$

Observa-se que a condição dada pela equação 4.59, quando se considera o caso de paredes rígidas, ou seja, impedância infinita, assume a forma

$$\left[\frac{\partial p'}{\partial r} \right]_{R_i, R_0} = 0 \quad (4.61)$$

a equação 4.61 mostra que a condição de contorno 4.59 recupera o resultado para o caso de paredes rígidas discutido no capítulo 3.

Pode-se reescrever a equação 4.59 em uma forma mais conveniente utilizando-se o número de Mach M e o número de onda axial adimensional λ definido como

$$\lambda = \frac{K_x}{K} \quad (4.62)$$

onde K é o número de onda do campo acústico livre definido por

$$K = \frac{\omega}{c_0} \quad (4.63)$$

Para obtenção da condição de contorno em termos de tais parâmetros observa-se a equação 4.59 na forma

$$\left[\frac{\partial p'}{\partial r} \right]_{R_i, R_0} = \frac{1}{i\omega} (\omega - K_x U)^2 \frac{p'}{z c_0} \quad (4.64)$$

expandindo-se o termo sublinhado da equação 4.64 tem-se que

$$\frac{1}{i\omega} (\omega - K_x U)^2 = \frac{\omega^2}{i\omega} - \frac{2\omega K_x U}{i\omega} + \frac{K_x^2 U^2}{i\omega} \quad (4.65)$$

substituindo a relação 4.62 na equação 4.65 tem-se

$$\frac{\omega^2}{i\omega} - \frac{2\lambda\omega^2 U}{i\omega c_0} + \frac{\omega^2 U^2 \lambda^2}{c_0^2 i\omega} = -\frac{\omega}{i} (1 - \lambda M)^2 = i\omega (1 - \lambda M)^2 \quad (4.66)$$

Desta forma, a partir do resultado da equação 4.66 chega-se na seguinte forma para condição de contorno

$$\left[\frac{\partial p'}{\partial r} \right]_{R_i, R_0} = \frac{i\omega}{z c_0} (1 - \lambda M)^2 p' \quad (4.67)$$

escrevendo-se a equação 4.67 em termos da admitância adimensional definida por

$$A = \frac{1}{z} \quad (4.68)$$

têm-se que a forma final mais usual da condição de contorno para um duto com paredes com liners é dada por

$$\left[\frac{\partial p'}{\partial r} \right]_{R_i, R_0} = iKA(1 - \lambda M)^2 p'. \quad (4.69)$$

4.3.2 Solução Modal Analítica para um Duto Anelar com Impedância finita na parede e escoamento uniforme

Considerando-se agora a forma final da condição de contorno dada pela equação 4.69 pode-se novamente derivar de maneira similar a feita no capítulo 3 a solução na direção radial dado o presente cenário de um duto anelar com paredes com liners.

Como a impedância acústica depende somente da pressão na direção normal, ou seja na direção radial r , tem-se que como

$$p'_r = R(r) \quad (4.70)$$

obtem-se a seguinte expressão para a condição de contorno

$$-R' + iKA(1 - \lambda M)^2 R = 0 \quad (4.71)$$

Retomando-se a forma da função R expressa no capítulo 3 em 3.85

$$R(r) = R_1 J_m(K_r r) + R_2 N_m(K_r r) \quad (4.72)$$

desta forma, para as paredes R_o e R_i , da mesma forma que realizada no capítulo 3, pode-se montar um sistema de equações a partir da condição de contorno expressa em 4.71 com seguinte formato

$$\begin{cases} (R_1 K_r J'_m(K_r R_i) + R'_2 K_r N'_m(K_r R_i)) + iKA(1 - \lambda M)^2 (R_1 J_m(K_r R_i) + R_2 N_m(K_r R_i)) = 0 \\ (R_1 K_r J'_m(K_r R_o) + R'_2 K_r N'_m(K_r R_o)) + iKA(1 - \lambda M)^2 (R_1 J_m(K_r R_o) + R_2 N_m(K_r R_o)) = 0 \end{cases} \quad (4.73)$$

Isolando-se R_2 na primeira equação do sistema 4.73 tem-se que:

$$R_2 = \frac{-R_1(-K_r J'_m(K_r R_i) + iKA(1 - \lambda M)^2 J_m(K_r R_i))}{(-K_r N'_m(K_r R_i) + iKA(1 - \lambda M)^2 N_m(K_r R_i))} \quad (4.74)$$

Assim, definido-se Q como o seguinte termo

$$Q = -\frac{(-K_r J'_m(K_r R_i) + iKA(1 - \lambda M)^2 J_m(K_r R_i))}{(-K_r N'_m(K_r R_i) + iKA(1 - \lambda M)^2 N_m(K_r R_i))} \quad (4.75)$$

Substituindo a relação para R_2 encontrada na equação 4.74 na segunda equação do sistema 4.73 e utilizando-se a relação para 4.75 chega-se que

$$(K_r J'_m(K_r R_o) + Q K_r N'_m(K_r R_o)) + iKA(1 - \lambda M)^2 (J_m(K_r R_o) + Q N_m(K_r R_o)) = 0 \quad (4.76)$$

conforme definido anteriormente no capítulo 3 defini-se

$$\sigma_{mn} = K_r R_o \text{ e } \sigma = \frac{R_i}{R_o} \quad (4.77)$$

logo pode-se reescrever a relação para Q 4.75 como

$$Q = -\frac{(-\frac{\sigma_{mn}}{R_o} J'_m(\sigma_{mn} \sigma) + iKA(1 - \lambda M)^2 J_m(\sigma_{mn} \sigma))}{(-\frac{\sigma_{mn}}{R_o} N'_m(\sigma_{mn} \sigma) + iKA(1 - \lambda M)^2 N_m(\sigma_{mn} \sigma))} \quad (4.78)$$

obtendo-se assim a seguinte forma final da equação 4.76

$$\frac{\sigma_{mn}}{R_o} (J'_m(\sigma_{mn}) + Q N'_m(\sigma_{mn})) + iKA(1 - \lambda M)^2 (J_m(\sigma_{mn}) + Q N_m(\sigma_{mn})) = 0 \quad (4.79)$$

Assim, resolvendo-se numericamente a equação transcendental 4.79, chega-se aos σ_{mn} possíveis para o caso de um duto anelar com fluxo subsônico em liners em suas paredes. A equação 4.79 deve ser resolvida de maneira iterativa já que é dependente do número de onda radial e axial, sabe-se pela equação deriva no capítulo

3 3.105, que o número de onda axial também é dependente do número de onda radial. Desta forma, deve-se utilizar um valor inicial para K_x e realizar a procura das raízes da equação 4.79 iterativamente até ocorra a convergência dos valores. Dado o comportamento oscilatório das funções de Bessel (J_m) e Neumann(N_m) novamente para cada modo circunferencial m .

Desta forma, utilizando-se o sistema para relacionar R_1 e R_2 chega-se a seguinte forma para a solução na direção radial a partir da equação 4.72

$$R(r) = R_1[J_m(K_r r) - Q N_m(K_r r)] \quad (4.80)$$

5 Efeitos do Liner na Propagação da Onda Acústica

Neste capítulo serão demonstrados os efeitos do liner na propagação da onda acústica dada a teoria abordada nos capítulos anteriores. Serão feitas comparações entre os casos com impedância na parede da nacela e o caso de paredes rígida, dentro das mesmas condições geométricas e de escoamento. Serão avaliados também os casos para um duto circular e para um duto anelar e assim tentar observar os efeitos da presença do cubo (hub) do motor turbofan.

5.1 Cálculo dos números de onda radiais e circunferenciais

Primeiramente, todas as análises dependem do cálculo das raízes da equação 4.79, que se trata de uma equação transcendental em números complexos e deve ser resolvida de maneira numérica e iterativa, já que esta também depende do número de onda axial K_x que por sua vez depende da raiz da equação 4.79.

A solução de tal equação se mostra complexa já que esta depende das funções de Bessel e Neumann bem como de suas derivadas, tendo estas argumentos que são números complexos o que restringe a quantidade de métodos numéricos de busca de raízes que podem ser utilizados. Métodos gráficos poderiam ser utilizados porém, o processo se torna muito manual o que limita a quantidade de raízes que podem ser encontradas. Desta forma, fez-se uso do método de Muller para a resolução da mesma.

O método de Muller é um método por interpolação que utiliza uma interpolação de segunda ordem. Uma raiz complexa é localizada utilizando-se uma parábola que passa por três valores na vizinhança do ponto de estimativa inicial (WAKI, 2007). Assim, para a aplicação deste método faz-se necessário ter uma estimativa prévia do local das raízes. Espera-se que os valores das raízes não destoem dos valores encontrados para o caso de parede rígida. Para confirmação de tal hipótese fez-se análise da função avaliando-se a superfície gerada por essa em uma malha de números complexos bem como as suas curvas de nível. Apesar da presença de vários mínimos locais pode-se rastrear, de maneira manual, a posição de algumas raízes e observar que suas partes reais são valores próximos

aos valores encontrados para o caso de paredes rígidas. Assim, para a estimativa inicial utiliza-se os valores de raízes independentes da frequência do caso hardwall.

Para o cálculo das raízes implementou-se o método numérico e escreveu-se uma rotina em MATLAB que faz o cálculo das raízes para o caso hardwall e utiliza-as como estimativas iniciais tanto das próprias raízes quanto para o número de onda axial dentro de um processo iterativo que é repetido até que a variação do número de onda axial K_x seja da ordem de 10^{-6} .

Para a validação da metodologia utilizada comparou-se os resultados obtido para o número de onda axial adimensional λ com os resultados encontrados por (KOUSEN, 1999) no caso de avaliação do modo circunferencial $m = 2$ para um duto circular com paredes com impedância acústica adimensional $A = 0.72 + 0.42i$ à uma frequência adimensional (número de Helmholtz) $He = 1$ e um escoamento uniforme subsônico com número de Mach $M = 0.5$

Tabela 1 – Comparação entre os números de onda axial adimensional λ direção positiva

λ	(KOUSEN, 1999)	Presente
λ_0^+	0.6195 - 5.0139i	-
λ_1^+	-5.8195 - 3.8968i	-0.6195 + 5.0139i
λ_2^+	0.4453 - 9.1868i	-0.4453 + 9.1868i
λ_3^+	0.4539 - 13.062i	-0.4539 + 13.0615i
λ_4^+	0.4795 - 16.822i	-0.4795 + 16.8217i
λ_5^+	0.5029 - 20.531i	-0.5029 + 20.5307i
λ_6^+	0.5220 - 24.213i	-0.5220 + 24.2131i
λ_7^+	0.5376 - 27.8802	-0.5375 + 27.8799i
λ_8^+	0.5502 - 31.5372	-0.5502 + 31.5370i
λ_9^+ (KOUSEN, 1999) λ_{13}^+ (Presente)	0.5891 - 49.754i	-0.5891 + 49.7543i

Tabela 2 – Comparação entre os números de onda axial adimensional λ direção negativa

λ	(KOUSEN, 1999)	Presente
λ_0^+	0.4101 + 1.2904i	-
λ_1^+	1.2595 + 6.0852i	-1.2595 - 6.0852i
λ_2^+	1.1457 + 9.6679i	-1.1457 - 9.6679i
λ_3^+	1.0218 + 13.315i	-1.0218 - 13.3150i
λ_4^+	0.9425 + 16.977i	-0.9425 - 16.9768i
λ_5^+	0.8908 + 20.635i	-0.8908 - 20.6353i
λ_6^+	0.8549 + 24.288i	-0.8549 - 24.2884i
λ_7^+	0.8288 + 27.937i	-0.8288 - 27.9368i
λ_8^+	0.8089 + 31.581i	-0.8089 - 31.5815i
λ_9^+ (KOUSEN, 1999) λ_{13}^+ (Presente)	0.7547 + 49.7722	-0.7547 - 49.7722i

Como pode-se observar pelos resultados apresentados nas tabelas 1 e 2 a rotina implementada obteve valores muito similares aos encontrados por (KOUSEN, 1999) e por

(VO; EVERSMAN, 1978) antes dele. A diferença apresentada nos sinais se dá devido a convenção utilizada para o termo temporal logo, os resultados obtidos são similares bastando-se multiplicar uma das colunas por menos um, ou seja, invertendo-se a convenção utilizada. Na tabela 1 observa-se uma diferença significativa para o valor encontrado para λ_1^+ onde o valor obtido via o método de Muller, utilizado no presente trabalho, converge para o valor encontrado para o λ_0^+ encontrado por (KOUSEN, 1999). Porém, avaliando-se o valor encontrado (KOUSEN, 1999) para este número de onda axial adimensional percebe-se que este destoa veementemente dos demais levantando-se a possibilidade de que seja o valor para um modo espúrio que não aparece quando se avalia os resultados na direção negativa de propagação 2, há a possibilidade também de que seja um modo de superfície ou um modo hidrodinâmico, para a constatação de qualquer uma dessas possibilidades uma análise mais profunda deve ser feita. Outro ponto analisado é que o nono valor encontrado por (KOUSEN, 1999), que é referente à nona raiz da equação 4.79, só foi localizado pela metodologia utilizada no presente trabalho para a décima terceira raiz calculada. Analisando-se os valores tabelados observa-se que de λ_8 para λ_9 a variação foi mais abrupta do que os valores anteriores preconizavam o que corrobora a ideia da existência de mais raízes entre o oitavo e nono valores encontrados por (KOUSEN, 1999), conforme os entregues pela rotina implementada em MATLAB.

A rotina implementada trata de um formulação geral para um caso de um duto anelar porém, ao se utilizar uma razão entre raios muito pequena a rotina recupera o caso de um duto circular sem corpo central e entrega resultados satisfatórios conforme os analisados nas tabelas 1 e 2.

Tabela 3 – Autovalores calculados para um duto circular caso $He = 1$, $M = 0.5$, $A = 0.72 + 0.42i$, $m = 2$

n	σ_{mn}
1	4.4930 - 0.0394i
2	8.0394 - 0.1897i
3	11.3704 - 0.1833i
4	14.6137 - 0.1616i
5	17.8176 - 0.1415i
6	21.0009 - 0.1251i
7	24.1723 - 0.1117i
8	27.3363 - 0.1007i
9	30.4952 - 0.0917i
10	33.6506 - 0.0840i
11	36.8035 - 0.0776i
12	39.9544 - 0.0720i
13	43.1040 - 0.0672i

Observando-se os valores encontrados para as raízes da equação 4.79, constata-se que as raízes tratam-se de números complexos onde a parte complexa esta relacionada com a atenuação proporcionada pelo liner.

5.2 Diagrama de lugar das raízes para os números de onda axial

Nesta seção serão avaliados os efeitos do corpo central no duto e da impedância das paredes no número de onda axial K_x , avaliando-se o que ocorre com suas componentes real e imaginária dado a presença ou ausência de um escoamento uniforme.

Os casos avaliados consistem no número de onda axial para os modos circunferenciais de ordem $m = 0$, a impedância acústica adimensional considerada tanto nas paredes do raio mais e externo quanto na paredes do corpo central, foi de $A = 1 + 0.42i$. O duto anelar considerado possui razão entre raios $R_i/R_o = 0.5$. Para cada um dos casos considerou-se os cinco primeiros modos radiais em uma circunstância onde a frequência adimensional (número de Helmholtz) $He = 5$. Para tais condições de operação os valor crítico $\sigma_{mn,c}$ assume os valores de

$$\begin{cases} \sigma_{mn,c} = 5 \text{ para } M = 0 \\ \sigma_{mn,c} = 5.77 \text{ para } M = 0.5 \end{cases} \quad (5.1)$$

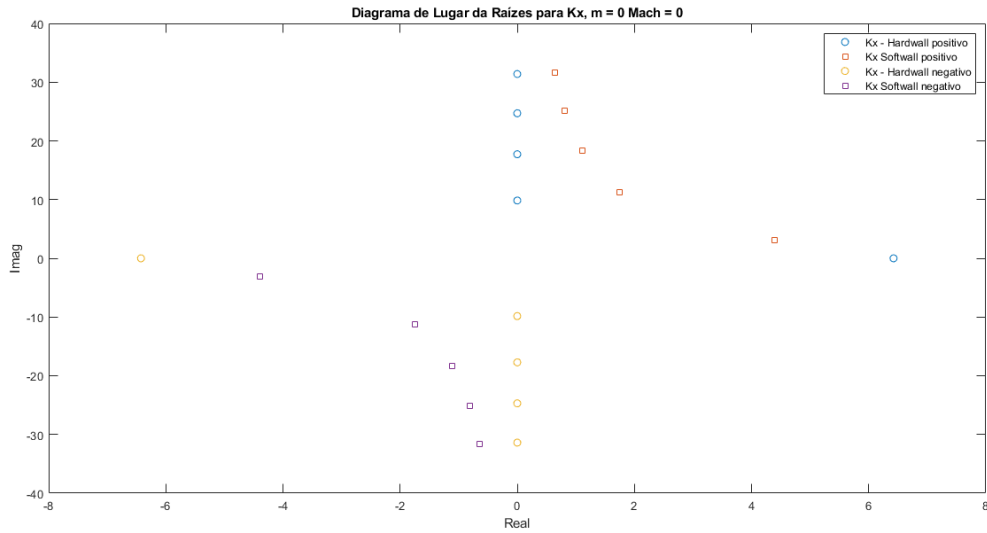


Figura 14 – Diagrama de lugar das raízes duto circular sem escoamento

Avaliando-se a figura 14 observa-se que para o caso de parede rígidas os modos que se propagam (cut-on) possuem número de onda na direção axial totalmente real e os que não propagam (cut-off) são puramente imaginários. A partir do momento em que as paredes são consideradas com uma impedância finita observa-se que mesmo para modos que se propagam o número de onda K_x possui componente imaginária mesmo que pequena tal componente indica a atenuação que é inserida no sistema pela presença do liner. Os modos cut-off deixa também de ser puramente imaginários e passam a ter uma componente real. Vale ressaltar a simetria entorno de zero para este caso

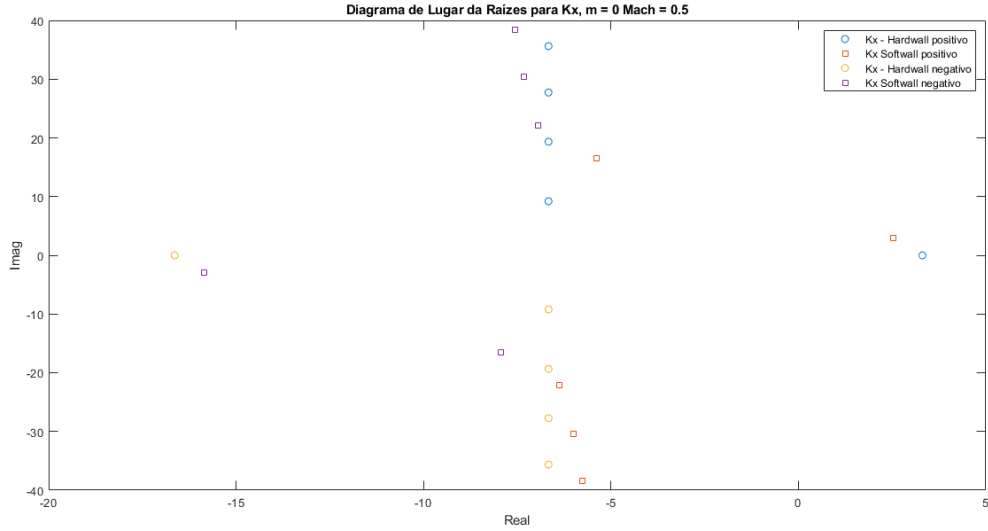


Figura 15 – Diagrama de lugar das raízes duto circular com escoamento

A figura 15 mostra que a presença do escoamento na direção axial positiva desloca os números de onda K_x para esquerda do diagrama com uma certo estiramento também para o lado esquerdo o que implica em dizer que em casos com escoamento os modos que se propagam na direção positiva são "ajudados" pelo escoamento enquanto os modos que se propagam na direção negativa são retardados. Os modos cut-off do caso softwall possuem suas partes imaginárias invertidas ou seja o diagrama é espelhado em relação ao eixo real dado a presença do escoamento.

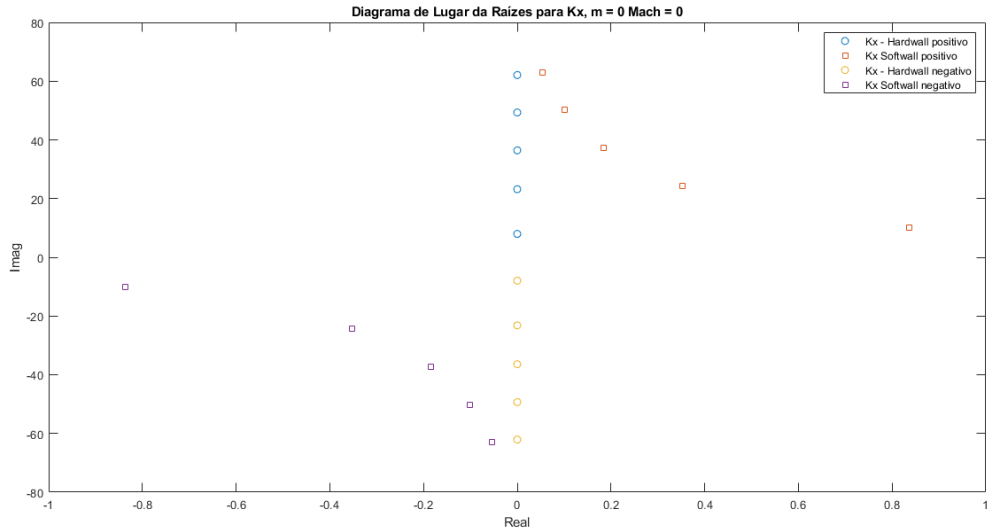


Figura 16 – Diagrama de lugar das raízes duto anelar sem escoamento

Para um duto anelar sem escoamento, observa-se da figura 16 que a presença do corpo central faz com que o modo que antes propagava não propaga mais passando a ser puramente complexo. Isso se dá devido ao fato do corpo central alterar o comportamento das raízes σ_{mn} fazendo com que estas tenham valores diferentes devido a descontinuidade

da função em zero ocasionada pela presença da função de Neumann. Novamente os modos passam a deixar de ser puramente imaginários ou reais para o caso com impedância finita nas paredes

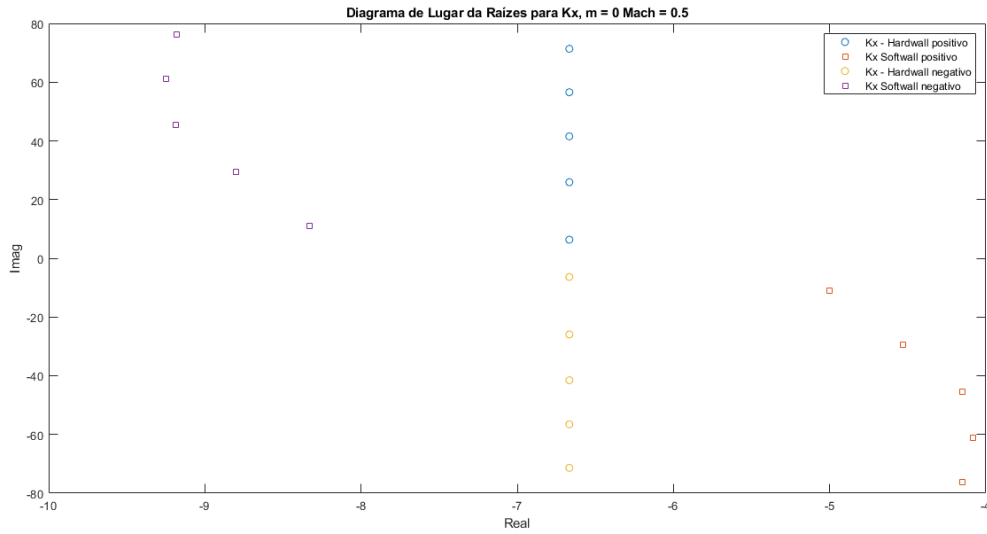


Figura 17 – Diagrama de lugar das raízes duto anelar com escoamento

A figura 17 combina todos os efeitos supracitados onde a presença do hub faz com que o modo que para o caso circular deixa de propaga para o caso anelar dado o comportamento das raízes σ_{mn} e o escoamento gera o deslocamento do diagrama.

5.3 Forma do modos acústicos

Nesta seção serão demonstrados os formatos dos modos acústicos gerados segundo a teoria abordada no capítulo anterior. Os modos de interesse são os modos circunferências e radiais que serão basicamente produto das funções separadas da direção R e θ . Como dito anteriormente, para um duto totalmente circular tem-se que somente a função de Bessel irá ditar o comportamento da função já que, a função de Neumann é finita para $r = 0$. Para o duto anelar, ou seja, considerando-se a presença do cubo do rotor, ambas as funções, Bessel e Neumann, ditarão o comportamento da componente radial. Com tais fatos em vista, fez-se uma rotina simples em MATLAB onde pode-se criar a o domínio de um tubo circular e outro de um tubo anelar, como um corte de seção. Assim, pode-se avaliar os formatos dos modos acústicos para os casos de um tubo circular de raio unitário e para um duto anelar com razão $R_i/R_0 = 0.5$.

5.3.1 Análise dos modos acústicos para o caso hardwall

Primeiramente serão considerados casos de dutos circulares e anelares de paredes rígidas a fim de se fazer uma análise geral do formato e da influência do corpo central nos

modos acústicos circunferenciais e radiais.

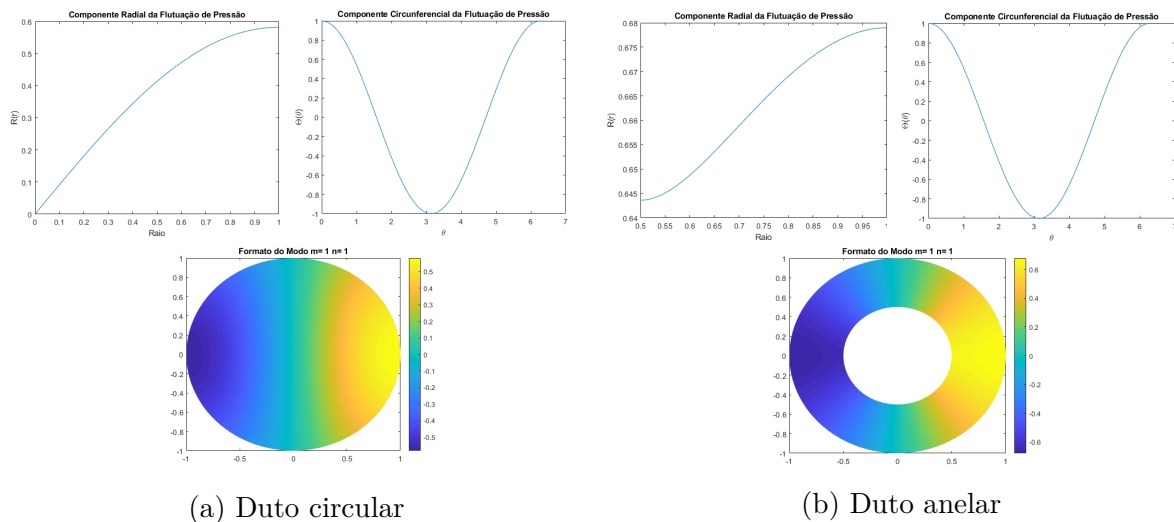


Figura 18 – Formato do acústico para $m = 1$ e $n = 1$

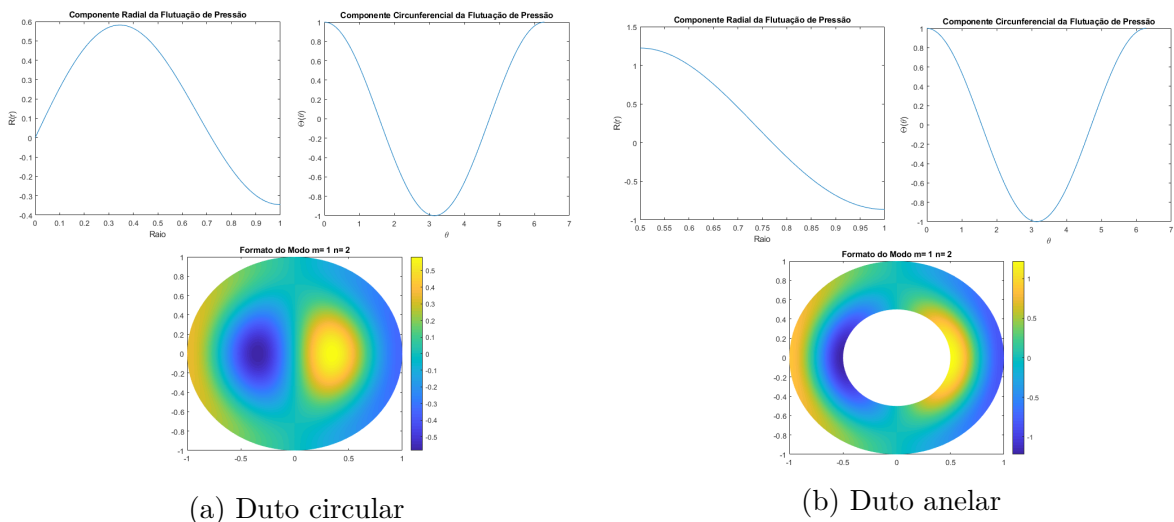


Figura 19 – Formato do acústico para $m = 1$ e $n = 2$

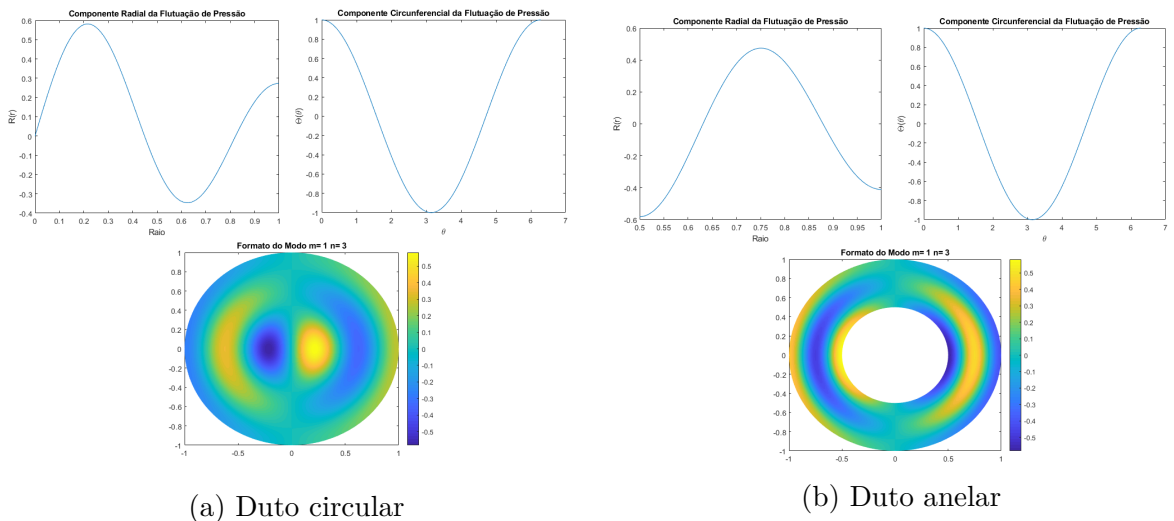


Figura 20 – Formato do acústico para $m = 1$ e $n = 3$

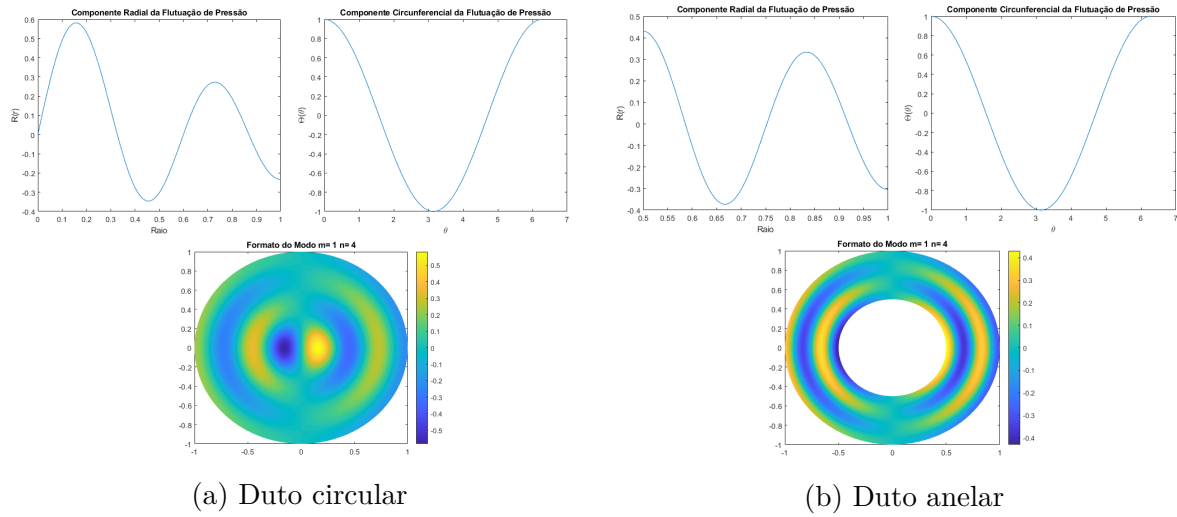


Figura 21 – Formato do acústico para $m = 1$ e $n = 4$

Os quatro primeiros casos ilustrados nas figuras de 18 à 21 apresentam o primeiro modo circunferencial e os quatro primeiros modos radiais para tal cenário. Observa-se que o comportamento oscilatório tende a aumentar para modos radiais de mais alta ordem. Observa-se, também, que o formato dos modos para os dutos totalmente circular e anelares possuem o mesmo padrão porém, devido a presença da parede do cubo do rotor, os formatos antes mais distribuídos tendem a se concentrarem no espaço disponível.

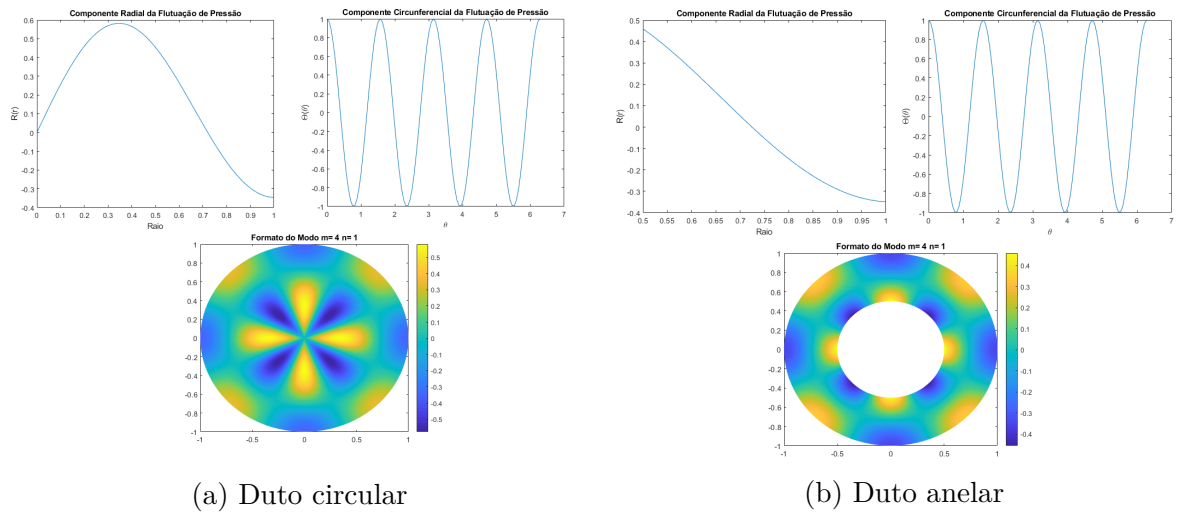


Figura 22 – Formato do acústico para $m = 4$ e $n = 1$

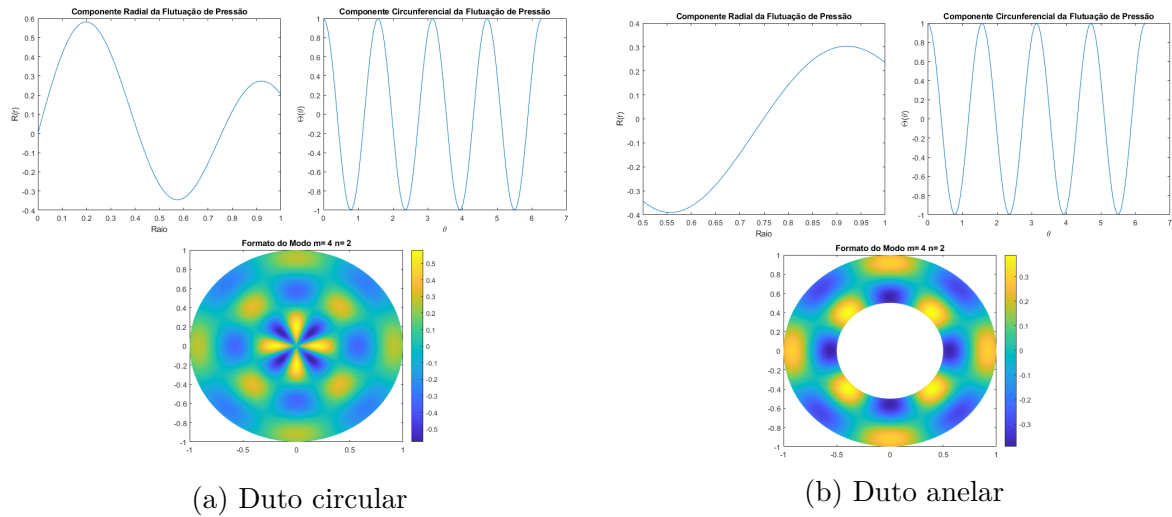


Figura 23 – Formato do acústico para $m = 4$ e $n = 2$

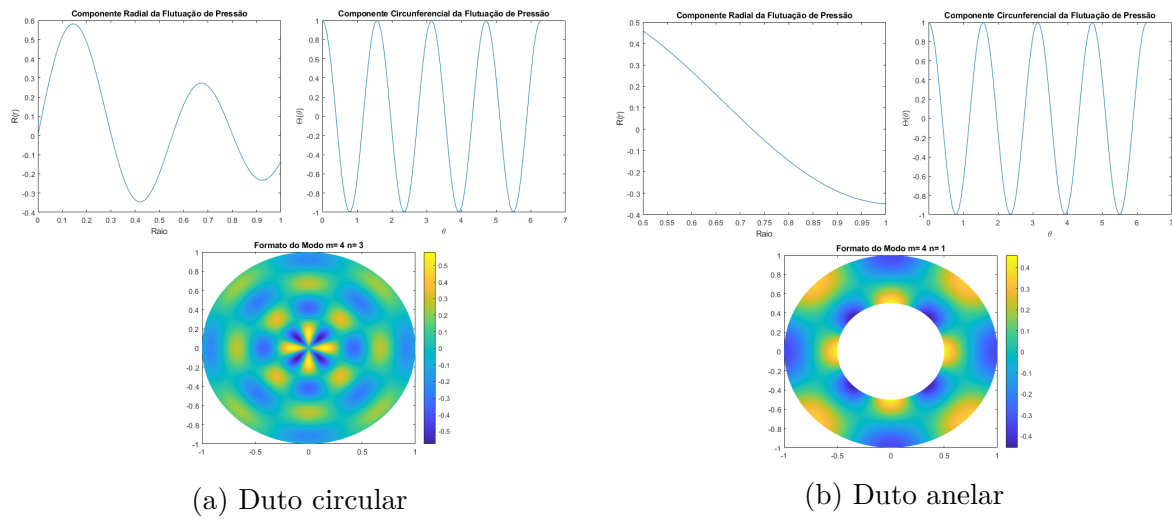


Figura 24 – Formato do acústico para $m = 4$ e $n = 3$

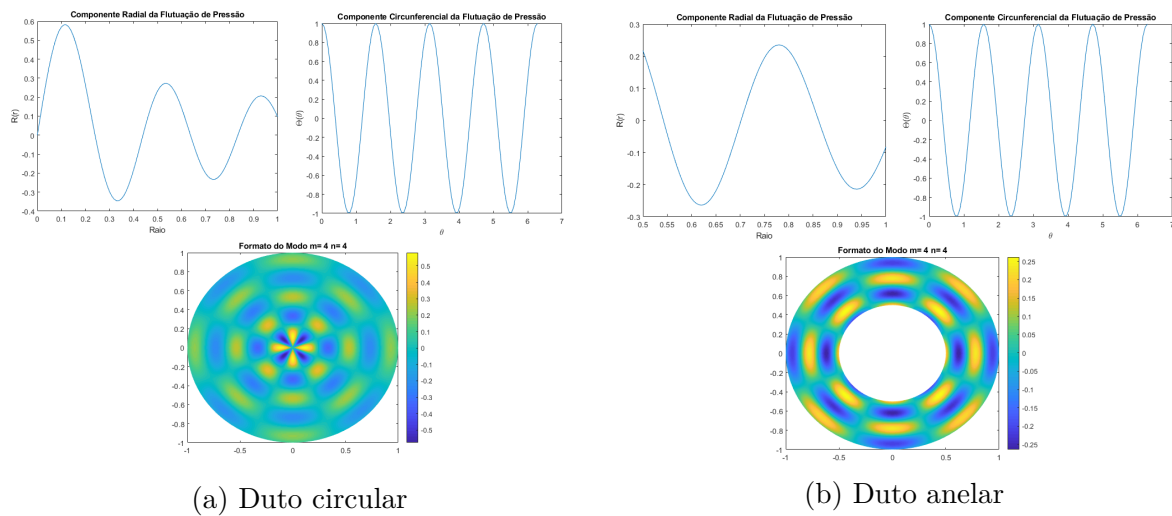


Figura 25 – Formato do acústico para $m = 4$ e $n = 4$

As figuras de 22 à 25 representam agora os quatro primeiros modos radiais para o quarto modo circunferencial. Observa-se que tratam-se de formatos mais complexos e que oscilam mais, mesmo para modos radiais de baixa ordem. Isto ocorre pois, como visto anteriormente, o modo m é argumento da função $\Theta(\theta)$ logo o aumento deste implica no aumento da frequência de oscilação dos modos avaliados. Novamente, observa-se que os modos possuem formatos similares, porém nos dutos anulares os efeitos oscilatórios encontram-se confinados em uma região menor.

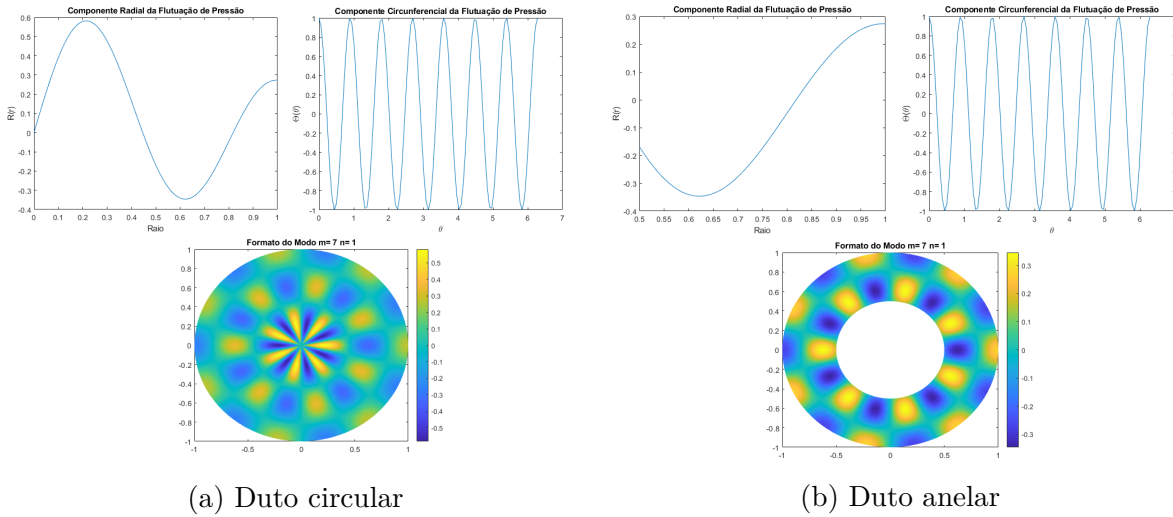


Figura 26 – Formato do acústico para $m = 7$ e $n = 1$

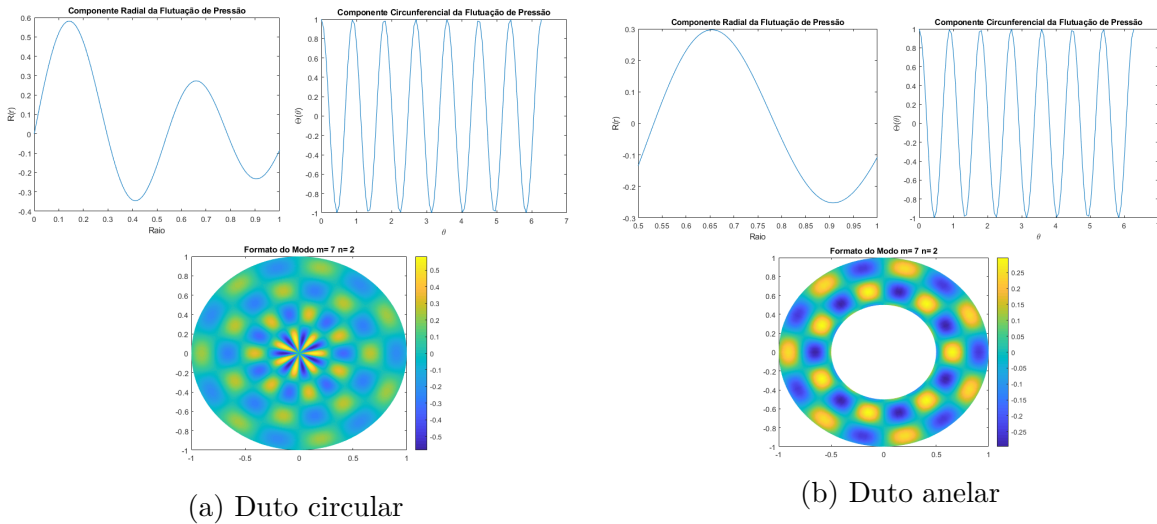


Figura 27 – Formato do acústico para $m = 7$ e $n = 2$

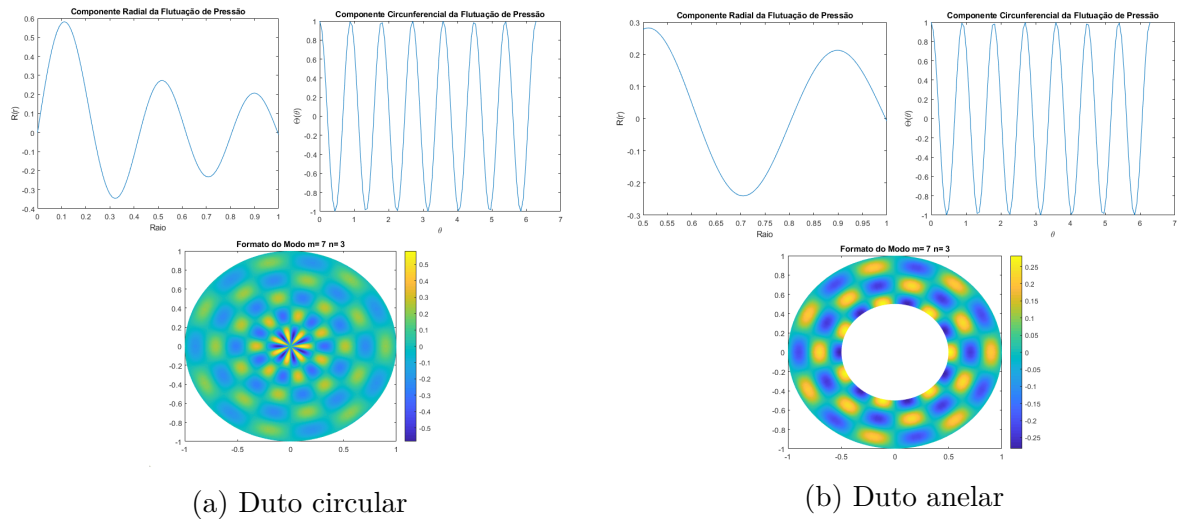


Figura 28 – Formato do acústico para $m = 7$ e $n = 3$

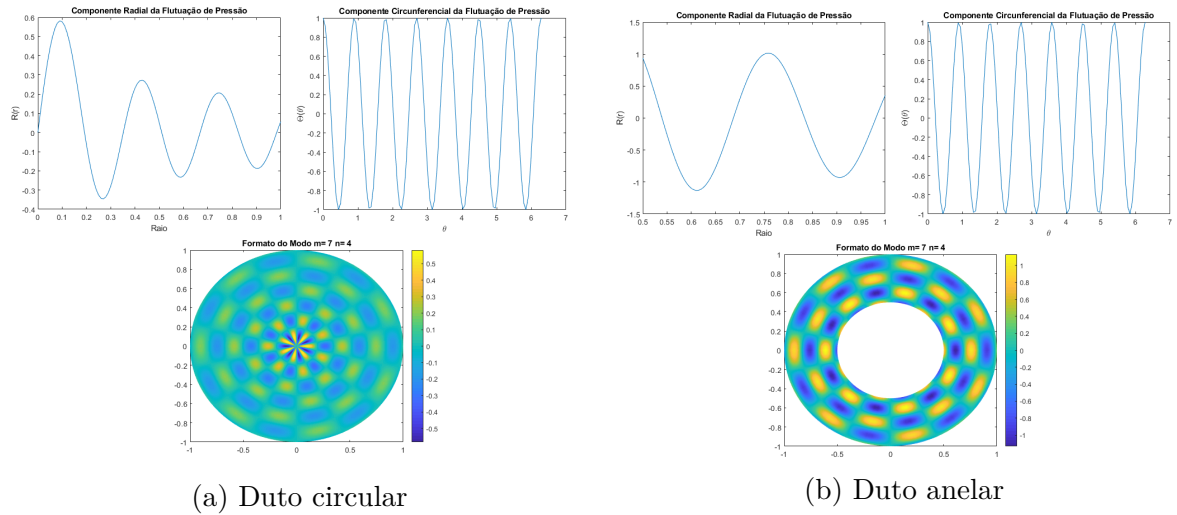


Figura 29 – Formato do acústico para $m = 7$ e $n = 4$

As figuras de 26 à 29 mostram o formato dos quatro primeiros modos radiais para o sétimo modo circumferencial. Novamente, os mesmo comportamentos podem ser observados devido ao aumento da frequência de oscilação demonstrando que quanto maior a ordem de ambos os modos, mais complexos serão seus formatos mesmo que ainda sim, sigam um padrão. É mais perceptível em modos de mais alta ordem que os modos tem formatos de hélice. Para estes modos de mais alta ordem é ainda mais claro o efeito da parede do cubo do rotor.

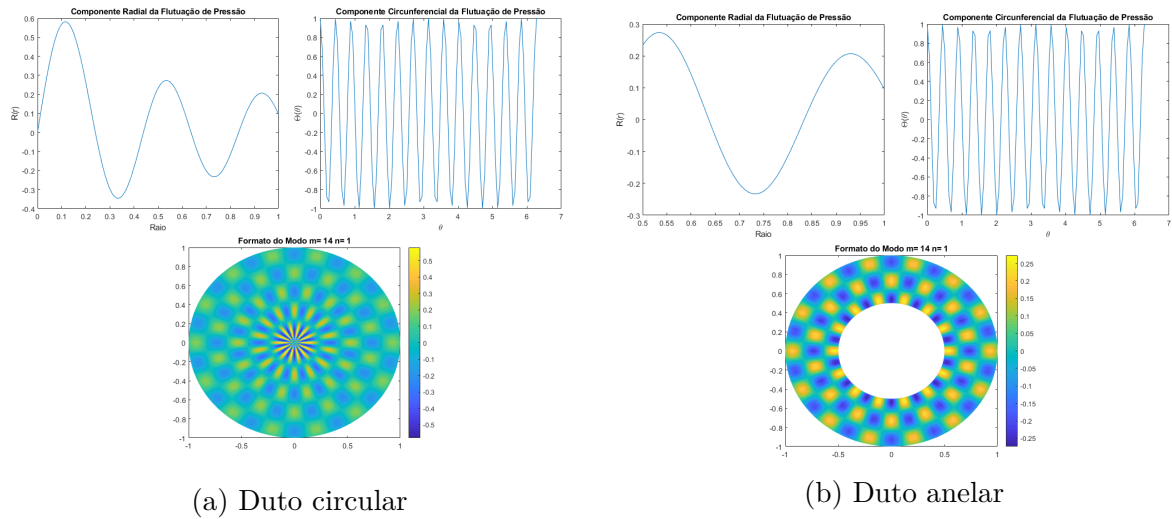


Figura 30 – Formato do acústico para $m = 14$ e $n = 1$

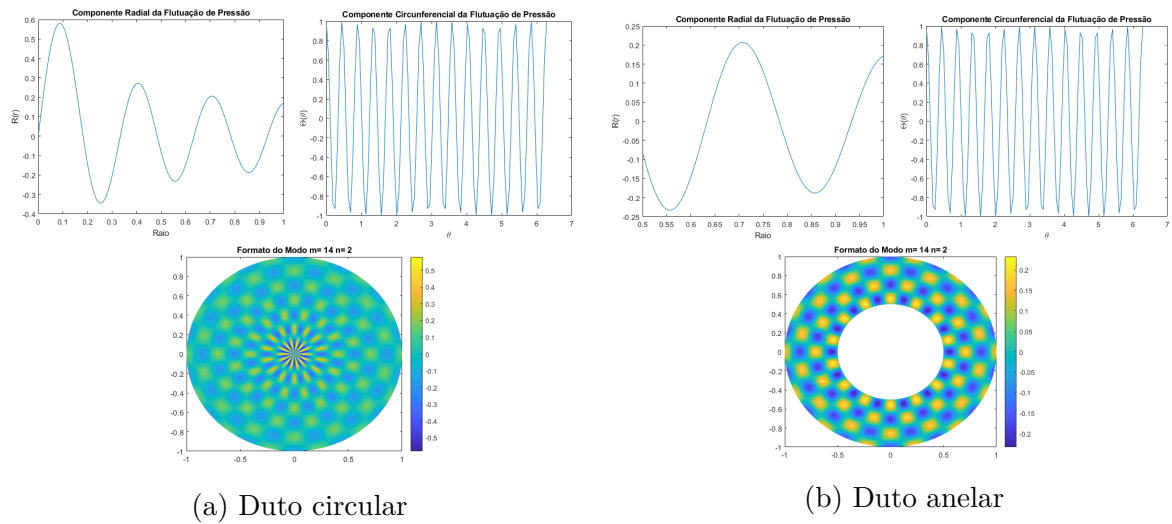


Figura 31 – Formato do acústico para $m = 14$ e $n = 2$

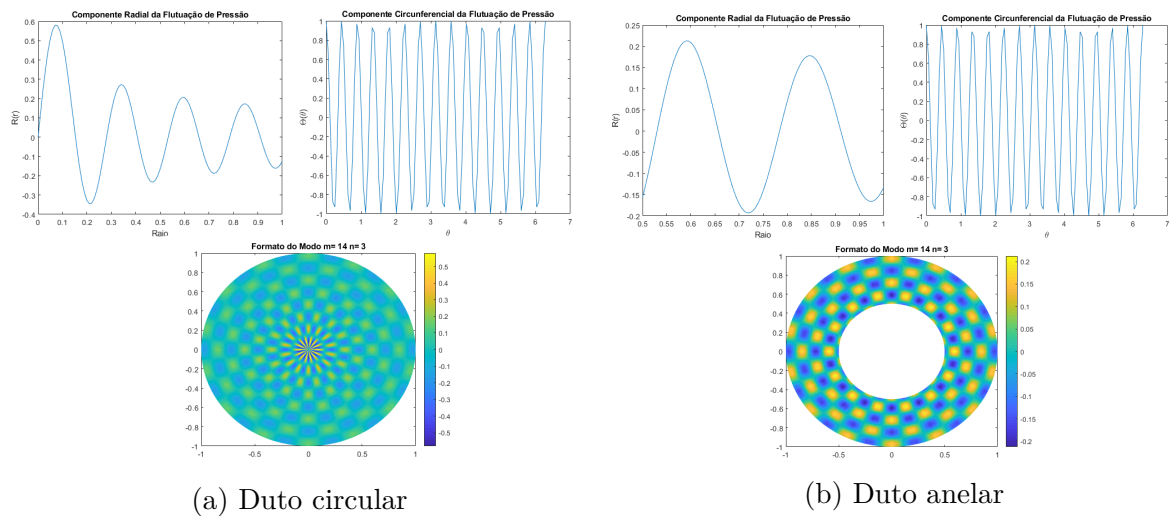


Figura 32 – Formato do acústico para $m = 14$ e $n = 3$

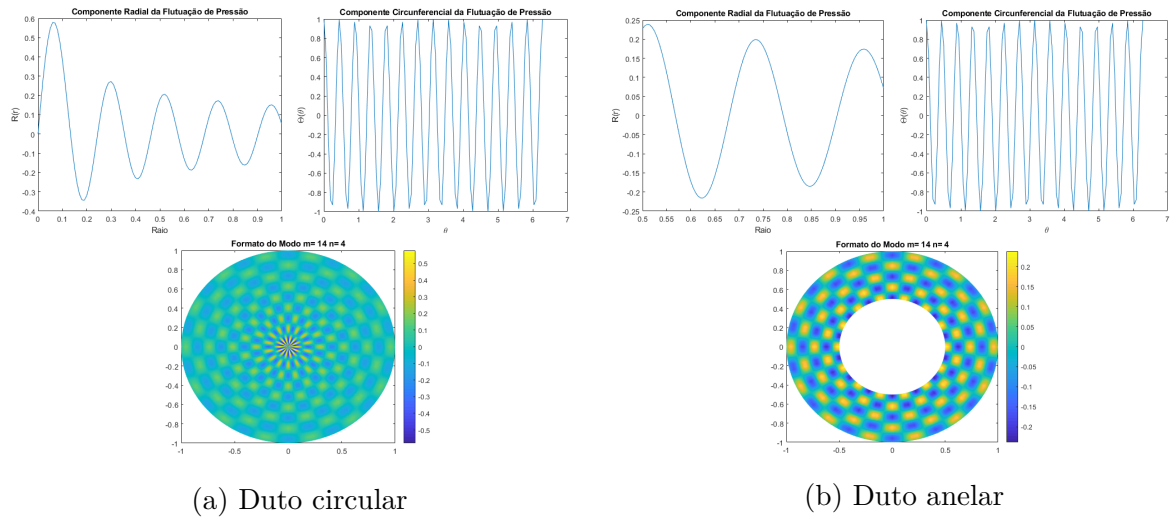


Figura 33 – Formato do acústico para $m = 14$ e $n = 4$

Agora analisando-se as figuras de 30 à 33 reafirma-se o formato em hélice dos modos acústicos e aumento da complexidade do formato a medida que as ordens circunferenciais e radiais aumenta. Comparando-se os dutos totalmente circulares com os anelares percebe-se que o confinamento da entre as paredes da nacele e do cubo do rotor causam em geral, um aumento na amplitude da oscilação dos modos radiais, provavelmente devido ao efeito da condição de parede rígida causada pela presença de um corpo central.

5.3.2 Análise dos modos acústicos para o caso softwall

Tendo em vista o comportamento geral e as considerações feitas na subseção anterior será feita a comparação de alguns modos acústicos para um casos com impedância finita nas paredes. O caso analisado será o mesmo utilizado para a validação do cálculo das raízes da equação 4.79. Onde a frequência adimensional (número de Helmholtz) $He = 1$, o número de Mach $M = 0.5$, a admitância adimensional $A = 0.72 + 0.42i$.

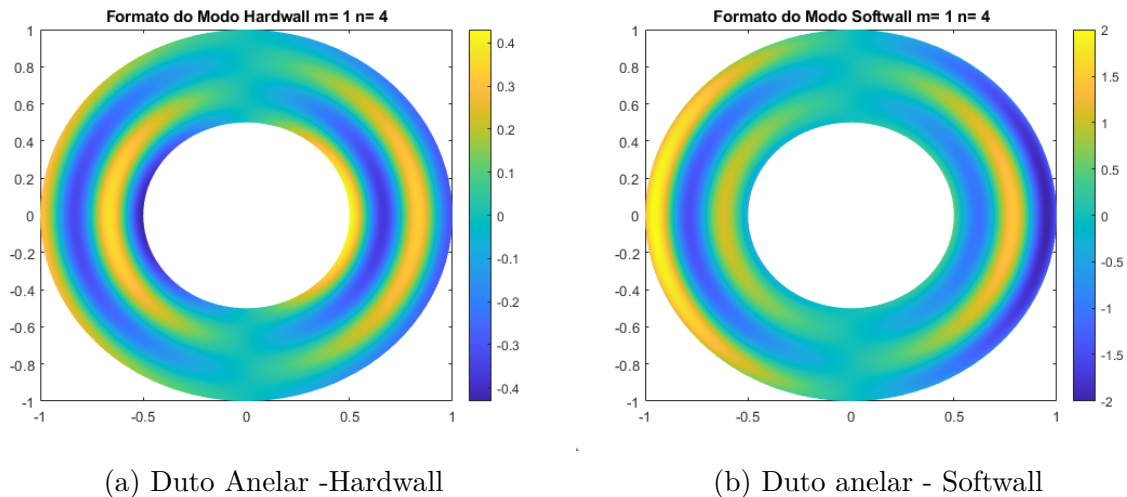


Figura 34 – Formato do modo acústico para $m = 1$ e $n = 4$

Avaliando-se a figura 34 as diferenças no formato do modo acústico não são tão perceptíveis desta forma, fez-se a diferença entre os valores absolutos das amplitudes de cada modo para que se pudesse avaliar os efeitos do liner conforme expresso na figura 35

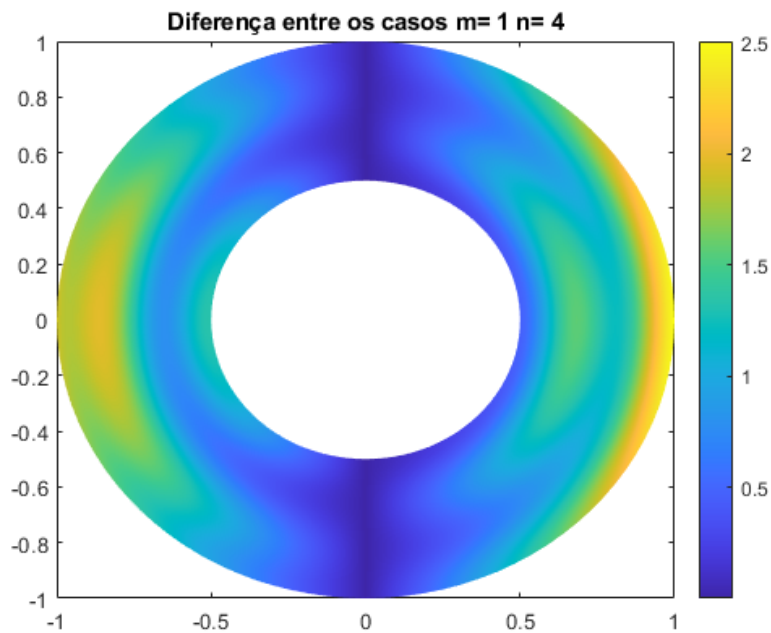


Figura 35 – Duto Anelar-diferença

Observa-se que as diferenças mais significativas são próximas às paredes, o que é de se esperar já que, a condição de contorno para a direção radial passou de um valor $\frac{\partial p'}{\partial r} = 0$ para uma condição que apresenta um na parede da nacele.

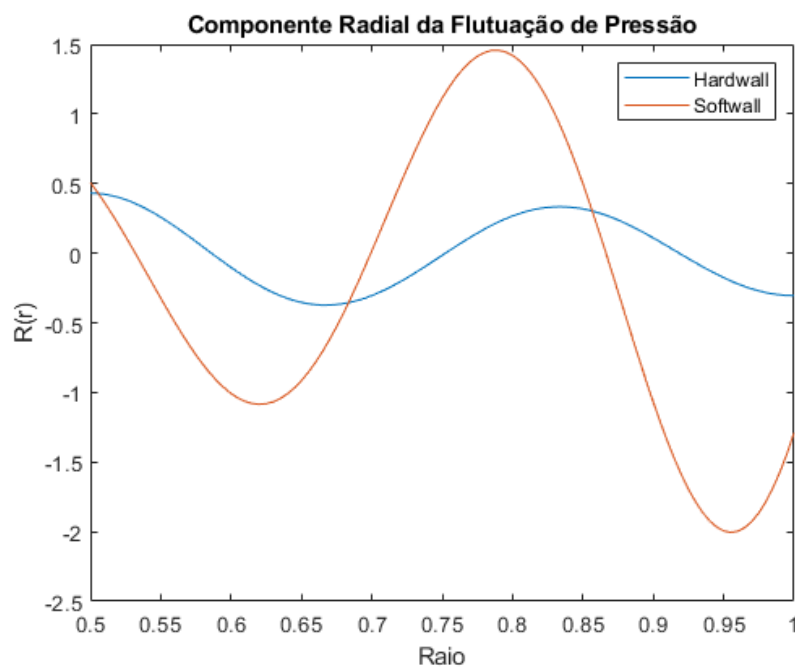


Figura 36 – Flutuação de Pressão

Avaliando-se a figura 36 pode-se observar que o liner introduz não só um efeito na magnitude da flutuação próxima a parede mas, como consequência, altera a fase da componente radial flutuação de pressão.

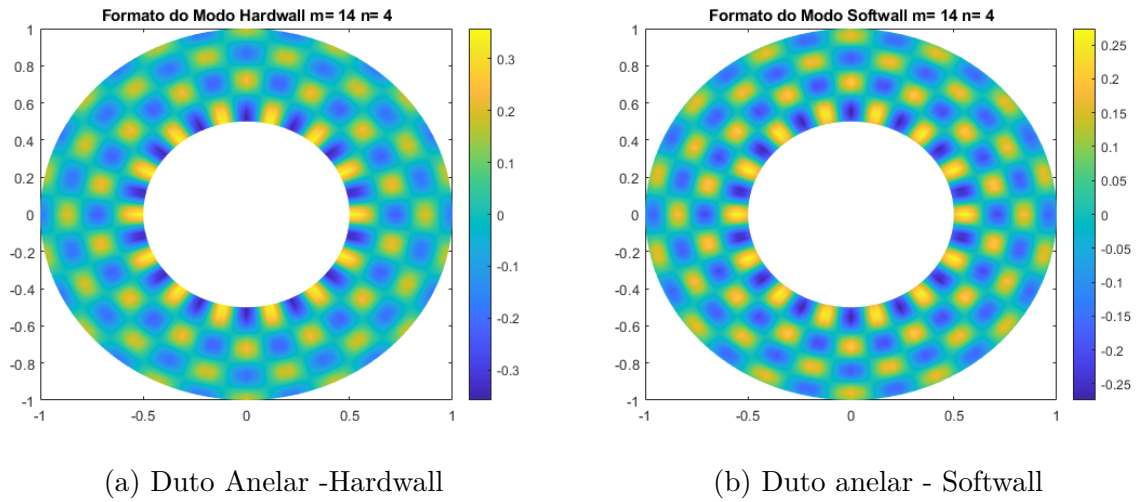


Figura 37 – Formato do modo acústico para $m = 14$ e $n = 4$

A figura 37 trata-se da comparação entre os formatos para um modo de maior ordem, neste caso avaliar as diferenças apenas avaliando visualmente os dois modos torna-se ainda mais difícil. Porém a figura 38, traz a tona as diferenças entra os modos e novamente pode-se observar o impacto do efeito da impedância nos contornos.

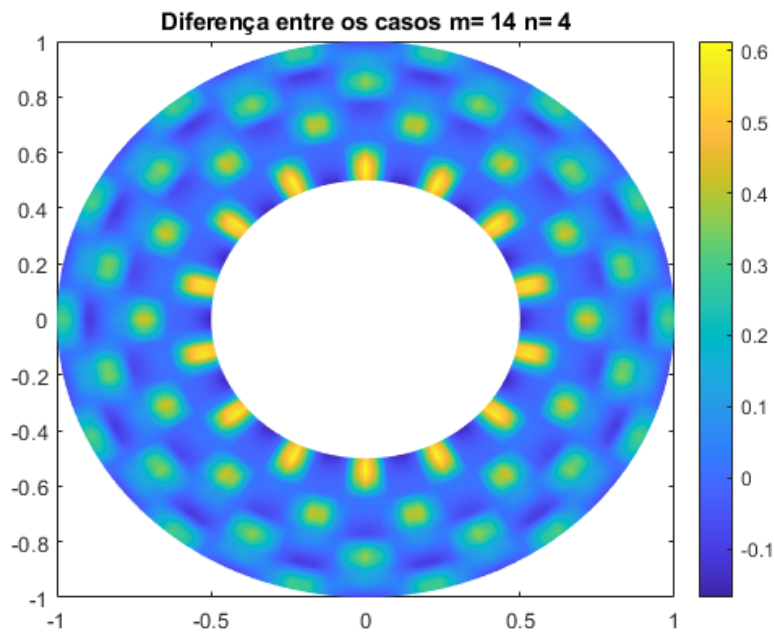


Figura 38 – Duto Anelar-diferença

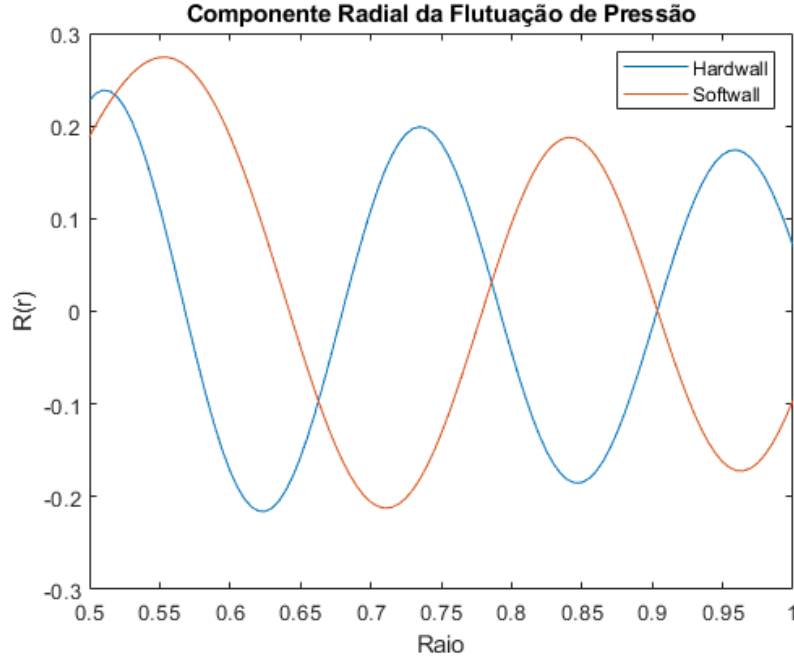


Figura 39 – Flutuação de Pressão

Avaliando-se a componente radial da flutuação de pressão dada na figura 39 observa-se que o impacto da condição de contorno na amplitude do modo é bem menor do que no caso $m = 1$, constatando-se que para modos de mais alta ordem os efeitos da impedância nas paredes são menores. Porém, observa-se ainda que a fase foi alterada significativamente.

5.4 Curvas de dispersão

Agora considerando-se um caso de uma cascata de 18 pás de rotor e 16 pás de estador, onde o escoamento axial $U - \infty = 49.31 \text{ m/s}$, em condições normais de temperatura e pressão. Tal caso resulta em um número de Mach $M_\infty = 0.12$. Considerando-se um rotor à 30 RPS e um raio de ponta de pá de 24 polegadas, aproximadamente 0.609 metros. Tem-se que segundo a 3.117 os modos $m = 4$ e $m = 14$ serão excitados para um par $h = 2$ e $k = -2$ e $h = 7$ e $k = -7$ respectivamente.

Para cada um desses modos m dada as condições operacionais definidas o $\sigma_{mn,c}$ possui os seguintes valores:

$$\begin{aligned}\sigma_{4n,c} &= 12.2552 \\ \sigma_{14n,c} &= 42.8931\end{aligned}\tag{5.2}$$

Assim, pode-se traçar as curvas de dispersão podendo-se avaliar a propagação do modo e a frequência de corte referente ao modo e às condições operacionais.

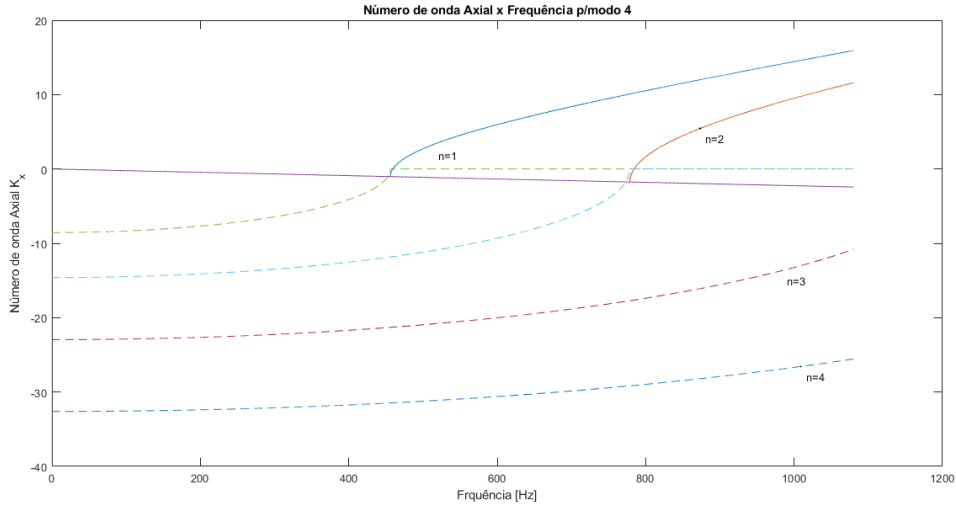


Figura 40 – Curva de dispersão para o modo $m = 4$ e n de 1 à 4

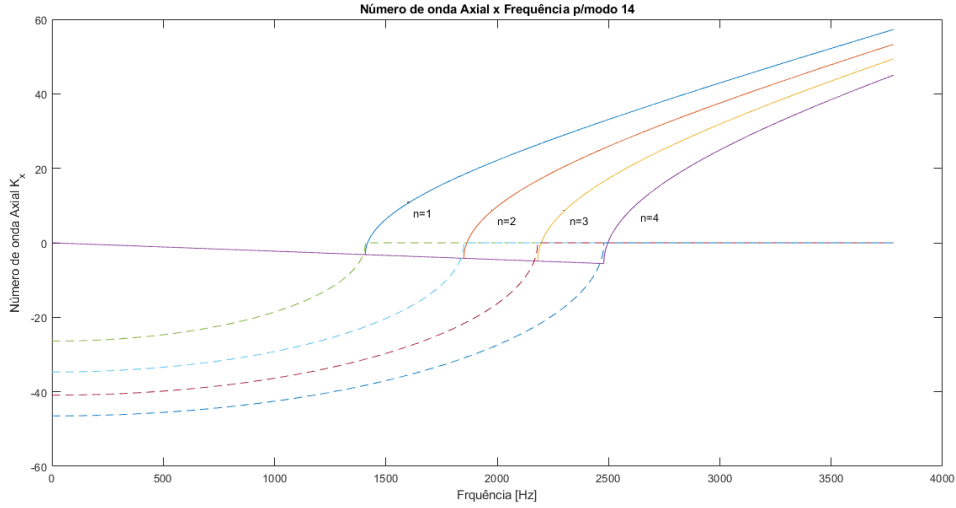


Figura 41 – Curva de dispersão para o modo $m = 14$ e n de 1 à 4

As curvas contínuas dos gráficos das figuras 40 e 41 representam a parte real do modo axial K_x , já as partes imaginárias são representadas pelas curvas tracejadas. O local de interseção das curvas onde as curvas passam a ser positivas, representam a frequência de corte. Ou seja, a partir de tal ponto o modo se propaga.

Avaliando-se a curva da figura 40 observa-se que para os modos radiais $n = 3$ e $n = 4$ não propagam para a condição de excitação do cenário montado, o que avaliando-se os dados da tabela da figura 13 corrobora os valores encontrados para $\sigma_{mn,c}$ já que modos que possuem valores maiores que $\sigma_{mn,c}$ não propagam.

Avaliando-se a figura 41, demonstra os quatro primeiros modos radiais se propagam para a frequência de excitação do cenário montado. Observa-se também que quanto maior a ordem do modo radial maior frequência de corte.

Considerando-se agora os efeitos de uma admitância constante de $A = 0.72 + 0.42i$, nas mesmas condições de operação.

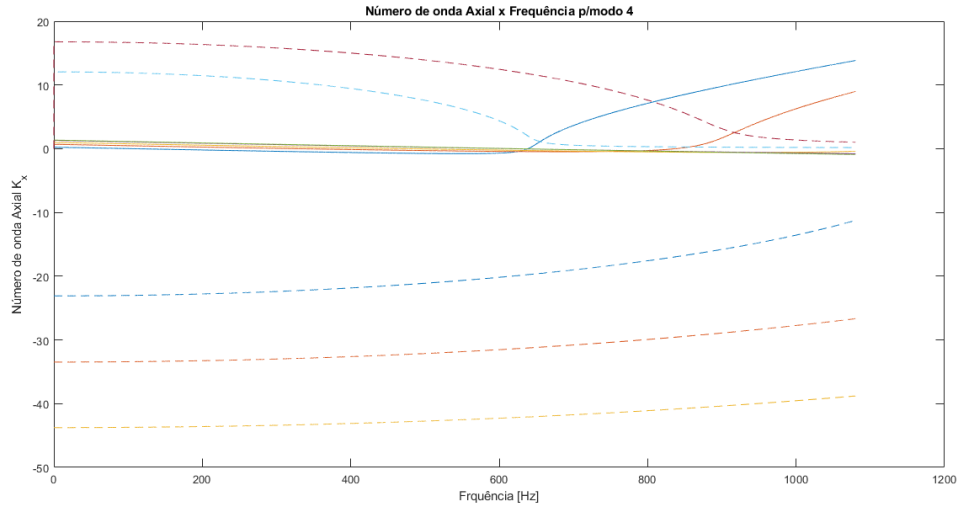


Figura 42 – Curva de dispersão para o modo $m = 4$ e n de 1 à 4 com impedância

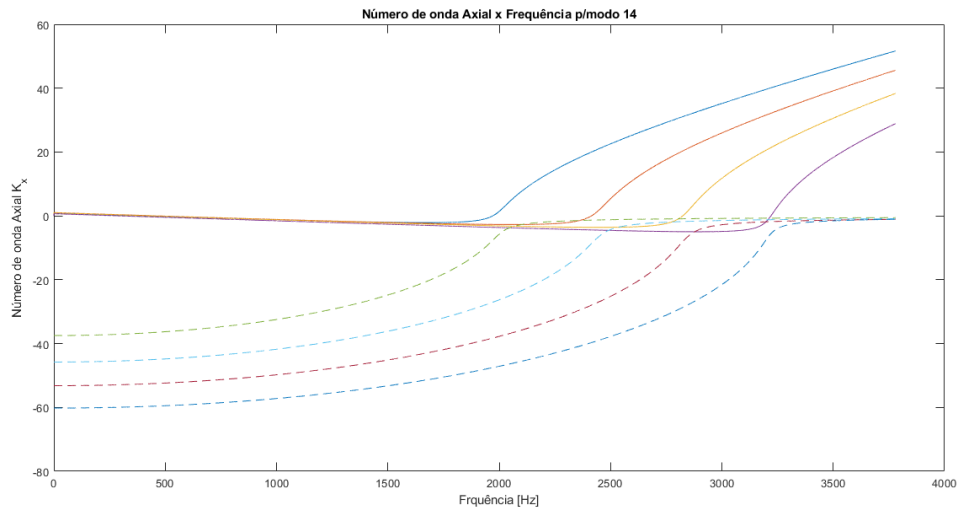


Figura 43 – Curva de dispersão para o modo $m = 14$ e n de 1 à 4 com impedância

Avaliando-se a figura 42 e comparando-se com a figura 40 pode-se observar claramente o deslocamento do gráfico para a direita e a inversão das partes imaginárias para os dois primeiros modos, observa-se que a frequência de corte foi alterada e os modos só passam agora a se propagar para frequências acima de 600 Hz. O mesmo percebe-se na comparação das figuras 43 e 41, apesar de que para o modo $m = 14$ os quatro primeiros modos radiais se propagam, observa-se novamente o deslocamento do gráfico para o lado direito implicando no aumento da frequência de corte onde os modos se propagam a partir de 1500 Hz. Observa-se em ambos os gráficos considerando-se a impedância que a transição da parte imaginária para real foi suavizada sendo este um dos efeitos da consideração de contornos não-rígidos.

Deve-se ressaltar que o caso com impedância considerado, utiliza uma impedância constante para todo o espectro de frequência sendo este o principal fator para a atenuação observada em todo o espectro. Obviamente, os liner possuem um raio de ação limitado de atenuação que onde os valores da impedância variam com a frequência. Os liners tendem a atenuar mais em frequências mais próximas de suas frequência de ressonância e menos a medida que se afasta dela. Desta forma, o caso considerado não representa um modelo de liner real porém, representa um caso do extremo oposto ao do hardwall onde os contornos possuem uma baixa impedância e constante ao longo do espectro de frequências.

6 Conclusão

Com base na teoria de geração e propagação de ruído em dutos e analisando-se as formas dos modos, pode-se perceber que com exceção de uma onda plana todos os modos se propagam em forma de ondas helicoidais ou seja são modos giratórios. Os modos radiais são propagáveis somente se sua velocidade de fase na direção circunferencial na parede do duto for maior que a velocidade do som. Existe uma redução na frequência de cut-on dado a presença do escoamento onde, os modos acústicos são propagáveis somente acima desta frequência que depende da velocidade do escoamento, da velocidade do som no meio e de parâmetros do rotor como o número de pás e a frequência de rotação do rotor. Observa-se também avaliando-se os parâmetros de cut-on e cut-off, que apenas ondas planas são propagáveis em qualquer frequência.

Considerando-se os contornos com uma impedância finita observa-se que os modos circunferenciais passam a ter componentes imaginárias tal mudança gera grandes efeitos nos modos axiais onde, diferentemente do caso de paredes rígidas, estes passam a ter componentes imaginárias mesmo para casos em que o modo se propaga. Tal fato indica um efeito de atenuação gerado pela contorno absoritivo.

A consideração de um duto com liner eleva drasticamente a complexidade do problema onde as raízes que ditam os modos circunferenciais passam a depender da frequência de excitação, da velocidade do escoamento e da impedância do contorno. Como a impedância de um liner também varia com a frequência o cálculo dos σ_{mn} deve ser realizado dado esta variação para que se possa observar os efeitos reais de um liner na propagação da onda.

Este trabalho visa dar insumos para uma avaliação preliminar dos efeitos de se considerar um contorno absoritivo, mostrando os efeitos de atenuação no número de onda axial, nas mudanças na amplitude e fase do modo circunferencial e a inserção de componentes imaginária nestes mesmos modos.

Referências

- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists*. [S.l.]: AAPT, 1999. Citado na página 65.
- BATCHELOR, C. K.; BATCHELOR, G. *An introduction to fluid dynamics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2000. Citado na página 67.
- BIELAK, G. W.; HERSH, A. S. Advanced turbofan duct liner concepts. NASA Langley Technical Report Server, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 8.
- BUTKOV, E. Física matemática, ed. Guanabara, Rio de Janeiro, 1988. Citado na página 21.
- GLEGG, S.; DEVENPORT, W. Aeroacoustics of low mach number flows: fundamentals, analysis, and measurement. Academic Press, 2017. Citado 2 vezes nas páginas vi e 22.
- HIRSCHBERG, A.; RIENSTRA, S. W. An introduction to aeroacoustics. *Eindhoven university of technology*, 2004. Citado na página 17.
- KOUSEN, K. A. Eigenmodes of ducted flows with radially-dependent axial and swirl velocity components. 1999. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.
- MASON, W. H. Configuration aerodynamics. *Virginia Tech*, p. 3–41, 2006. Citado 2 vezes nas páginas vi e 14.
- MOTSINGER, R.; KRAFT, R. Design and performance of duct acoustic treatment. 1991. Citado 3 vezes nas páginas vi, 8 e 9.
- MYERS, M. On the acoustic boundary condition in the presence of flow. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 71, n. 3, p. 429–434, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- PASCUAL, B. J. *A Study of the Viscous Effects over an Acoustic Liner using the Linearised Navier-Stokes equations in the Frequency Domain*. 2016. Citado 2 vezes nas páginas vi e 6.
- PIMENTA, B. G. Simulação numérica de ondas não-lineares em dinâmica dos gases e ruído de interação rotor-estator em turbofans aeronáuticos. *Universidade de Brasília*, 2016. Citado 6 vezes nas páginas vi, 5, 18, 23, 26 e 29.
- SMITH, M. J. Aircraft noise. Cambridge University Press, 2004. Citado 4 vezes nas páginas vi, 1, 2 e 3.
- SPILLERE, A. M. N. et al. Towards optimal design of acoustic liners in turbofan aero-engines. Universidade Federal de Santa Catarina, 2017. Citado 5 vezes nas páginas vi, 4, 5, 7 e 9.

VO, P.; EVERSMAN, W. A method of weighted residuals with trigonometric basis functions for sound transmission in circular ducts. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 56, n. 2, p. 243–250, 1978. Citado na página [45](#).

WAKI, Y. *On the application of finite element analysis to wave motion in one-dimensional waveguides*. Tese (Doutorado) — University of Southampton, 2007. Citado na página [43](#).

ZHANG, Q.; BODONY, D. J. Numerical investigation of a honeycomb liner grazed by laminar and turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 792, p. 936–980, 2016. Citado na página [9](#).

A Teoria de Coordenadas Curvilíneas

Muitas vezes os problemas são descritos em coordenada cartesianas, o sistema de coordenadas cartesianas apresenta uma grande vantagem de que todos três vetores unitários $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ são constantes tanto em direção quanto em magnitude. Porém, nem todos os problemas físicos são bem expressos no sistema cartesiano de coordenadas ([ARFKEN; WEBER, 1999](#)).

Desta forma, o sistema de coordenada deve ser escolhido de forma a se encaixar no problema de tal modo que se possa explorar quaisquer restrições ou simetrias que o problema apresente. Assim, pode-se obter uma solução de maneira mais simples.

Naturalmente, paga-se um preço ao se utilizar coordenadas não-cartesianas. As expressões para cálculo vetorial devem ser desenvolvidas de maneira geral tal que, sejam consistentes com o sistema proposto ([ARFKEN; WEBER, 1999](#)).

Em um sistema coordenado cartesiano, lida-se com três famílias de planos mutuamente perpendiculares onde $x = cte$, $y = cte$, $z = cte$. Assim para definir-se um sistema curvilíneo, sobrepõe-se sobre esse sistema três outras famílias de superfícies

$$q_i(x, y, z) \text{ onde } i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad (\text{A.1})$$

onde nenhuma das superfícies da família q_i , necessitam ser paralelas umas às outras ou de serem planas. Tais superfícies não necessitam, também, serem mutuamente perpendiculares mas por questões de simplificação impõe-se tal condição já que, em problemas de aplicação físicas, sistemas ortogonais são mais comuns e adequados. A ortogonalidade do sistema induz que áreas infinitesimais e volumes infinitesimais são produtos dos diferenciais de coordenada.

Dado tais hipótese, pode-se desenvolver o formalismo para coordenadas curvilíneas ortogonais derivando-se da geometria as coordenadas diferenciais e usando-as como elementos de linha, área e volume para as operações vetoriais.

Pode-se descrever qualquer ponto no espaço como a interseção dos planos cartesianos ou da interseção das superfícies do sistema curvilíneo. Descrevendo-se as coordenadas curvilíneas como $q_1 = cte$, $q_2 = cte$, $q_3 = cte$, pode-se indentificar o ponto por (q_1, q_2, q_3)

bem como por (x, y, z)

$$\begin{aligned} & q_1, q_2, q_3 \\ x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x, y, z) \\ q_2 &= q_2(x, y, z) \\ q_3 &= q_3(x, y, z) \end{aligned} \tag{A.3}$$

Com cada família de superfícies $q_i = cte$, pode-se associar um vetor unitário \hat{q}_i normal à sua respectiva superfície e na direção de crescimento desta. Em geral esses vetores unitário dependerão de sua posição no espaço. Logo, um vetor \mathbf{V} pode ser escrito como

$$\mathbf{V} = \hat{q}_1 V_1 + \hat{q}_2 V_2 + \hat{q}_3 V_3 \tag{A.4}$$

Derivando-se a equação A.2 em x tem-se

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 \tag{A.5}$$

similarmente, pode-se realizar o mesmo processo para as variáveis y e z , em notação vetorial têm-se

$$d\mathbf{r} = \sum \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i \tag{A.6}$$

do teorema de Pitágoras em coordenadas cartesianas o quadrado da distância entre dois pontos é dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{A.7}$$

Substituindo-se a equação A.6 na equação A.7 tem-se

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r}^2 = \sum \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dq_i dq_j = \\ &g_{11} dq_1 dq_1 + g_{12} dq_1 dq_2 + g_{13} dq_1 dq_3 \\ &g_{21} dq_2 dq_1 + g_{22} dq_2 dq_2 + g_{23} dq_2 dq_3 \\ &g_{31} dq_3 dq_1 + g_{32} dq_3 dq_2 + g_{33} dq_3 dq_3 = \sum g_{ij} dq_i dq_j \end{aligned} \tag{A.8}$$

onde

$$g_{ij}(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \tag{A.9}$$

observa-se que a expressão para g_{ij} é o produto escalar entre os vetores tangentes à as curvas \mathbf{r} para $q_j = cte$ e $j \neq i$. Coletivamente, esses coeficientes são referidos como a métrica do sistema coordenado.

Limitando-se a sistemas ortogonais, tem-se que

$$g_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j \text{ e } \hat{q}_i \cdot \hat{q}_j = \delta_{ij} \quad (\text{A.10})$$

e simplificando-se a notação como

$$g_{ii} = h_i^2 \quad (\text{A.11})$$

logo

$$ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2 = \sum (h_i dq_i)^2 \quad (\text{A.12})$$

Os sistemas coordenados ortogonais são descritos especificando-se esses fatores de escala positivos h_1, h_2, h_3 . Em contra partida os fatores de escala podem ser identificados pelas relações

$$ds_i = h_i dq_i, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = h_i \hat{q}_i \quad (\text{A.13})$$

para qualquer q_i , mantendo-se os demais q constantes. Desta forma o diferencial $d\mathbf{r}$ pode ser escrito como

$$d\mathbf{r} = h_1 dq_1 \hat{q}_1 + h_2 dq_2 \hat{q}_2 + h_3 dq_3 \hat{q}_3 \quad (\text{A.14})$$

A ortogonalidade do sistema coordenado leva que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = 0 \quad (\text{A.15})$$

com as duas outra relações similares ([BACHELOR; BACHELOR, 2000](#)) e como

$$\frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \right) = -2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1 \partial q_2} \quad (\text{A.16})$$

pode-se observar que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial h_2 \hat{q}_2}{\partial q_1} \text{ ou } \frac{\partial h_1 \hat{q}_1}{\partial q_2} \quad (\text{A.17})$$

logo, tem-se

$$\frac{\partial \hat{q}_1}{\partial q_2} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \hat{q}_2, \quad \frac{\partial \hat{q}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \hat{q}_1 \quad (\text{A.18})$$

similarmente pode-se obter quatro outra relações. E segue-se que

$$\frac{\partial \hat{q}_1}{\partial q_1} = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \hat{q}_2 - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} \hat{q}_3 \quad (\text{A.19})$$

similarmente obtêm-se a relação para \hat{q}_2 e para \hat{q}_3 .

B Códigos em Matlab

```

%%% Código para o cálculo das raízes da equação transcendental que define
%%% os números de onda radiais para um duto com liner e escoamento
%%% subsônico
%%% Autor: Guilherme Augusto D. da Silva - 14/0141995
%%% Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília
%%% 2/2019
%% Comandos Iniciais
clc
clear all

%% Cálculo dos Autovalores para o caso hardwall
n=5; %Número de raízes a serem calculadas
ht=0.00001; % razão entre raios
ordem=2; %Ordem m (número de onda na direção theta)

A=@(x)(besselj(ordem-1,x)-besselj(ordem+1,x))*(bessely(ordem-1,x*ht)...
    -bessely(ordem+1,x*ht))-(besselj(ordem-1,x*ht)-besselj(ordem+1,x*ht))...
    *(bessely(ordem-1,x)-bessely(ordem+1,x)); %Função para hardwall

b=1;
x=0:0.01:200;

for l=1:length(x)
    Pf(l)=A(x(l));
end

for j=2:1:length(x)-1

    if abs(Pf(j-1))>abs(Pf(j)) && abs(Pf(j))<abs(Pf(j+1))
        xs=x(j-1):10^-6:x(j+1);

        for m=1:length(xs)
            Pf2(m)=A(xs(m));
        end

        for k=2:length(xs)-1
            if abs(Pf2(k-1))>abs(Pf2(k)) && abs(Pf2(k))<abs(Pf2(k+1))
                sigmamn(b)=xs(k);
                b=b+1;
            end
        end
    end
end
if b>n
    break
end
end

%% Cálculo dos Autovalores para o caso com impedância
c0=340; % Velocidade do som
R=0.5;
omegaD=(-1/(2*pi))*340*2*pi/R; % Frequência dimensional
K=omegaD/c0; %Número de onda do campo livre
omega=K*R; % Frequência adimensional
a=0.72+0.42i; %Admitancia Acústica
sigma=ht; % Razão entre raios

```



```

M0=0.5; %Número de Mach
Kx_i=((omegaD./c0)/(1-M0^2)).*(-M0-sqrt(1-(1-M0^2)).*...
    (((sigmamn*c0)/(omegaD*R)).^2)));
lambda_i=Kx_i/K; %Número de onda Axial admensional

for i=1:1:n
    l=1;
    Kx(l)=Kx_i(i);
    lambda(l)=lambda_i(i);
    sigmamnZ(l)=sigmamn(i);

    for h=0:1:1000
        Q=@(x) -( -(0.5*(x/R)*besselj((ordem-1),x*sigma))+...
            (0.5*(x/R)*besselj((ordem+1),x*sigma))+(1i*a*K)...
            *besselj(ordem,x*sigma))/(-(0.5*(x/R)*bessely((ordem - 1),x*sigma))+...
            (0.5*(x/R)*bessely((ordem+1),x*sigma))+i*a*K*bessely(ordem,x*sigma));

        f1=@(x)-((x/R)*0.5*(besselj(ordem-1,x)-besselj(ordem+1,x))...
            +Q(x).*0.5*(x/R)*(bessely(ordem-1,x)-bessely(ordem+1,x)))+(1i*a*K)*...
            (((1-lambda(l)*M0)^2)*(besselj(ordem,x)+Q(x).*bessely(ordem,x)));

        guess=[sigmamnZ(l)-5 sigmamnZ(l) sigmamnZ(l)+1];
        sigmamnZ(l+1)=muller(f1,guess);
        Kx(l+1)=((omegaD./c0)/(1-M0^2)).*(-M0+sqrt(1-(1-M0^2)).*...
            (((sigmamnZ(l+1)*c0)/(omegaD*R)).^2)));
        lambda(l+1)=Kx(l+1)/K;
        if abs(lambda(l)-lambda(l+1))<10^-6
            break
        end
        l=l+1;

    end
    root(i)=sigmamnZ(l+1);
    lambdaf(i)=lambda(l+1);
end

```